

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

---

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in FISICA

Tesi di Laurea Specialistica in MODELLI NUMERICI DELLA FISICA

# Proprietà statistiche di dinamiche su network

Candidato:  
Francesco Turci

Relatore:  
Chiar.mo Prof. Armando Bazzani

Correlatore:  
Chiar.mo Prof. Giorgio Turchetti

---

Anno Accademico 2008/2009 - Sessione I



# Indice

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>Elenco delle Figure</b>	<b>v</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Modello Unidimensionale</b>	<b>11</b>
1 Premesse generali . . . . .	11
Transizioni di fase . . . . .	11
Ergodicità . . . . .	12
Campo medio . . . . .	12
2 Modello dettagliato a code infinite . . . . .	12
2.1 Modello di campo medio . . . . .	13
2.2 Risultati numerici . . . . .	14
Un solo veicolo . . . . .	15
Molti veicoli . . . . .	18
3 Code finite . . . . .	21
4 In sintesi . . . . .	22
<b>2 Modello della transizione</b>	<b>25</b>
1 Ipotesi sulla transizione . . . . .	25
2 Costruzione di un modello dinamico semplificato . . . . .	26
2.1 Code infinite . . . . .	26
2.2 Code finite . . . . .	29
3 Proprietà statistiche del modello . . . . .	30
3.1 Periodicità . . . . .	31
3.2 Diffusione . . . . .	34

---

3.3	Configurazioni . . . . .	37
3.4	Distribuzione degli zeri . . . . .	39
	Dipendenza da $c$ . . . . .	40
	Dipendenza da $f$ . . . . .	42
	Invarianza di scala . . . . .	42
3.5	Analisi dei flussi: diagramma fondamentale . . . . .	43
4	In sintesi . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Estensione bidimensionale</b>	<b>49</b>
1	Modello 2d . . . . .	49
	1.1 Dinamica sul reticolo . . . . .	49
2	Bidimensionale ed unidimensionale a confronto . . . . .	50
	2.1 Aperiodicità . . . . .	51
3	Diagramma fondamentale . . . . .	54
4	Sviluppo della congestione . . . . .	56
5	In sintesi . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Modello markoviano</b>	<b>61</b>
1	Ragioni per il modello markoviano . . . . .	61
2	Breve introduzione alle catene di Markov . . . . .	63
	2.1 Definizione di catena di Markov . . . . .	63
	2.2 Proprietà della matrice di transizione . . . . .	64
	Classificazione degli stati . . . . .	64
	Classificazione delle matrici di transizione . . . . .	65
	2.3 Stato stazionario per matrici regolari . . . . .	65
	Matrice limite . . . . .	66
	Vettore fisso . . . . .	66
	2.4 Catene di Markov reversibili . . . . .	66
3	Modello markoviano per la dinamica su toro . . . . .	67
	3.1 Equazione dinamica . . . . .	67
	3.2 Matrice di transizione . . . . .	68
<b>Conclusioni</b>		<b>74</b>
<b>A Modello unidimensionale: dettagli algoritmici</b>		<b>75</b>





# Elenco delle figure

1	Realizzazione bidimensionale del modello di Ising e modello di rete urbana bidimensionale a confronto. . . . .	2
2	Schema di diagramma fondamentale . . . . .	5
3	Il diagramma fondamentale macroscopico ottenuto da Geroliminis e Daganzo nel 2007 tramite l'utilizzo di una simulazione rappresentante il distretto degli affari della città di San Francisco (San Francisco Business District). Nel caso (a) viene rappresentato il flusso in uscita rispetto alla densità in ingresso, nel caso (b) la velocità in funzione della densità [1]. . . . .	6
4	Diagramma flusso/densità ottenuto da A. Geroliminis con esperimenti reali sulla città di Yokohama [1]. . . . .	7
5	Diagramma velocità/densità ottenuto da Geroliminis con esperimenti reali sulla città di Yokohama [1]. . . . .	7
1.1	Toro 1d, aspetto del programma. . . . .	13
1.2	In arancio l'andamento della velocità media per un singolo veicolo al variare della durata del tempo di verde. In blu viene rappresentato il modello costruito tramite ipotesi di campo medio, espresso dall'eq. 1.14. Come si vede il modello è valido ovunque tranne nella regione limite per cui tutti i semafori sono sempre rossi (che ovviamente non è ben definita essendo il punto per il quale il modello perde di significato). . . . .	16
1.3	In fucsia l'andamento della velocità media per un singolo veicolo al variare della durata del ciclo del semaforo. In blu viene rappresentato il modello costruito tramite ipotesi di campo medio, espresso dall'eq. 1.14. . . . .	17

1.4	La velocità media di attraversamento per un toro di $J=30$ semafori al variare del numero $N$ di veicoli e della frazione di verde $f$ . Si noti la difficile leggibilità del tratto iniziale del grafico in cui si ha una lenta discesa della velocità iniziale. La lettura si semplifica . . . . .	19
1.5	La velocità media di attraversamento per un toro di $J=30$ semafori al variare del numero $N$ di veicoli e della durata del ciclo $c$ . . . . .	19
1.6	La velocità media di attraversamento per un toro di $J=30$ semafori per $f=0.5$ , con in evidenza i due andamenti con la loro espressione analitica. . . . .	20
1.7	La velocità media di attraversamento per un toro di $J=30$ semafori per $f=0.3$ e $f=0.8$ , con in evidenza i due andamenti con la loro espressione analitica . . . . .	21
1.8	Il modello a code infinite e vari modelli a code finite a confronto	22
2.1	Confronto fra la velocità media ottenuta dalle simulazioni per un toro di $J=30$ con $c=10$ e $f=0.5$ e l'equazione 2.1 valutata contando il numero medio di siti vuoti nelle varie evoluzioni. .	27
2.2	Le rappresentazione di un toro sotto forma di stringa numerica	29
2.3	Il modello e la simulazione a confronto. . . . .	30
2.4	L'evoluzione temporale del numero di siti a coda nulla per $N=20$ , $J=30$ , $c=10$ , $f=0.5$ per una singola condizione iniziale. .	32
2.5	L'evoluzione temporale del numero di siti a coda nulla per $N=20$ , $J=30$ , $c=10$ , $f=0.5$ mediato su 100 condizioni iniziali. .	33
2.6	Evoluzione di una distribuzione di veicoli piccata. Si noti l'effetto di distribuzione dei veicoli. . . . .	34
2.7	L'andamento nel tempo della varianza della distribuzione delle code partendo da una distribuzione piccata. Il tratto iniziale, in cui si ha la diffusione, ha un andamento rettilineo, come richiesto dalla diffusione. . . . .	35
2.8	Andamento di $\langle S(0, t) \rangle$ nel tempo, in un grafico e nella sua versione in scala logaritmica. Nelle aree cerchiare il decadimento esponenziale. . . . .	36

---

2.9	Andamento del numero di configurazioni raggiunte dal sistema al variare del numero di veicoli. La frazione di verde è pari a $f=0.5$ . . . . .	38
2.10	Andamento del numero di configurazioni raggiunte dal sistema al variare del numero di veicoli. La frazione di verde è pari a $f=0.8$ . . . . .	38
2.11	Dipendenza da $c$ della distribuzione del numero di siti vuoti per un toro di 30 semafori con 20 veicoli. . . . .	40
2.12	La crescita asintotica del numero medio di siti non occupati all'aumentare della durata del ciclo dei semafori $c$ . . . . .	41
2.13	La crescita asintotica del deviazione standard del numero medio di siti non occupati all'aumentare della durata del ciclo dei semafori $c$ . . . . .	42
2.14	Dipendenza dal parametro $f$ della distribuzione del numero di siti a coda nulla. . . . .	43
2.15	Andamento del numero medio di zeri al variare di $f$ . . . . .	44
2.16	Andamento della deviazione standard sul numero medio di zeri al variare di $f$ . . . . .	44
2.17	Andamento della distribuzione dei siti vuoti all'aumentare delle dimensioni del toro per $c=10$ e $f=0.5$ . . . . .	45
2.18	Al variare del fattore di scala varia il valor medio del numero di siti vuoti per gli histogrammi precedenti, ma il rapporto rimane fisso. . . . .	45
2.19	Andamento del flusso in funzione del numero di veicoli per un toro di 30 semafori, con $c=10$ e $f=0.5$ . . . . .	46
2.20	Andamento del flusso in funzione del numero di veicoli per un toro di 30 semafori, con $c=10$ e $f=0.5$ . e coda massima pari a 8 veicoli . . . . .	47
3.1	Moto casuale sulla rete. . . . .	50
3.2	[L'andamento della velocità media dei veicoli a confronto fra il caso 2d e quello 1d . . . . .	51

3.3	Andamento sul network bidimensionale della velocità media dei veicoli al variare del ciclo dei semafori $c$ per $L=6$ e $f=0.5$ . Come si vede, differentemente dal caso unidimensionale, il tratto iniziale fortemente caratterizzato dalla dipendenza da $c$ è più regolare, non c'è cambiamento di concavità; si raggiunge comunque una condizione di congestione che abbassa gradualmente la velocità media. . . . .	52
3.4	Rappresentazione di due cammini unidimensionali su di un reticolo 2d. . . . .	52
3.5	Numero di semafori con coda nulla sul reticolo unidimensionale di $L=6$ , $N=20$ , $c=10$ , $f=0.5$ per una singola evoluzione. . .	53
3.6	Discrete Fourier Transform del segnale in figura 3.5. . . . .	53
3.7	Relazione flusso/numero di veicoli (diagramma fondamentale) per un reticolo di $6 \times 6$ semafori, con $f=0.5$ , $c=10$ e coda massima $c_{max}=8$ . . . . .	54
3.8	Relazione velocità/numero di veicoli (diagramma fondamentale) per un reticolo di $6 \times 6$ semafori, con $f=0.5$ , $c=10$ e coda massima $c_{max}=8$ . Come si vede dopo il primo regime l'andamento diviene rettilineo ( $\propto N$ ) per cui, nel calcolo del flusso, si ha una figura parabolica. . . . .	55
3.9	Relazione flusso/numero di veicoli (diagramma fondamentale) per un reticolo di $6 \times 6$ semafori, con $f=0.5$ , $c=10$ e coda massima $c_{max}=6$ . Notare che il massimo è a $N = \frac{6}{2} \times 36 = 108$ . . .	55
3.10	L'evoluzione di un un reticolo $20 \times 20$ con plateau di 7 veicoli ( $M=8$ ) e con il 35% (140 in totale) dei semafori che hanno la coda massima all'inizio dell'evoluzione. I colori più caldi indicano code più lunghe. . . . .	57
3.11	Crescita del numero di siti con coda massima per l'evoluzione di $20 \times 20$ semafori con plateau di 7 veicoli ( $M=8$ ) e con il 35% (140 in totale) dei semafori con coda massima. I parametri della dinamica sono $c=10$ e $f=0.5$ . . . . .	58

---

3.12	Crescita del numero di siti con coda massima per l'evoluzione di $20 \times 20$ semafori con plateau di 7 veicoli ( $M=8$ ) e con il 35% (140 in totale) dei semafori con coda massima. I parametri della dinamica sono $c=10$ e $f=0.2$ . . . . .	58
3.13	Crescita del numero di siti con coda massima per l'evoluzione di $20 \times 20$ semafori con plateau di 7 veicoli ( $M=8$ ) e con il 35% (140 in totale) dei semafori con coda massima. I parametri della dinamica sono $c=10$ e $f=0.8$ . . . . .	59
4.1	Modello a singolo semaforo. . . . .	62
4.2	La distribuzione delle code su 10 prove del processo dinamico con $F$ descritta da un processo periodico con frazione di verde $f=0.5$ , $c=10$ e $N=4$ . . . . .	69
4.3	La distribuzione delle code su 10 prove del processo dinamico con $F$ descritta da un processo casuale con media $f=0.5$ e $N=4$ . . . . .	69
4.4	Confronto con l'andamento di $s_0$ previsto dall'eq. 4.11 (curva rossa) con quanto computato con la matrice di Markov costruita in questo paragrafo (curva blu). . . . .	72
A.1	Lo schema dell'algoritmo della simulazione. . . . .	77
A.2	Una rappresentazione della funzione di switch $F_j$ dei semafori, con $c=10$ , $f=0.5$ , $\phi = 3$ . . . . .	78



# Introduzione

## Dinamiche di *switch* e processi su network

Molti modelli fisici, chimici, biologici, informatici e delle scienze sociali includono rappresentazioni della realtà in cui i processi dinamici in gioco vengono regolati tramite switch a due fasi del tipo *aperto-chiuso*, oppure *on-off*: il caso dei modelli di percolazione, del modello di Ising (fig. 1) per i materiali ferromagnetici, le catene di reazioni per i processi enzimatici nelle cellule, i modelli di mobilità urbana, problemi di *routing* sulla rete Web. Tutti questi modelli hanno in comune alcuni elementi essenziali: un insieme di elementi (gli *switch*), collegati fra loro da un qualche tipo di interazione; una dinamica intrinseca per ciascun elemento; lo scambio o la propagazione di una certa proprietà fra gli elementi della rete.

Abbiamo dunque tutta una serie di fenomeni e processi che si sviluppano su rete e che sono attualmente lontani dall'avere una descrizione che metta in relazioni quantità macroscopiche come la densità degli oggetti in moto sulla rete e ad esempio i tempi di percorrenza della rete stessa. Nel caso specifico della mobilità urbana, punto di riferimento ideale per questo lavoro di tesi, poter avere delle relazioni quantitative fra densità di veicoli e flusso in uscita permetterebbe di avere una conoscenza tale da impostare tutti gli strumenti normativi e tecnici per evitare o almeno governare le situazioni critiche in cui le città possono trovarsi a causa del forte impatto che la mobilità privata ha su di esse. Nell'ambito di questa tesi è stato costruito un modello semplificato per spiegare gli andamenti fondamentali su reti mono e bidimensionali, in modo da ricostruire i tratti generali delle relazioni fra le variabili macroscopiche, sulla scia di quanto recentemente proposto in letteratura [1],[2],[3]. Su tali modelli viene fatta un'analisi per verificar il valore conoscitivo da-

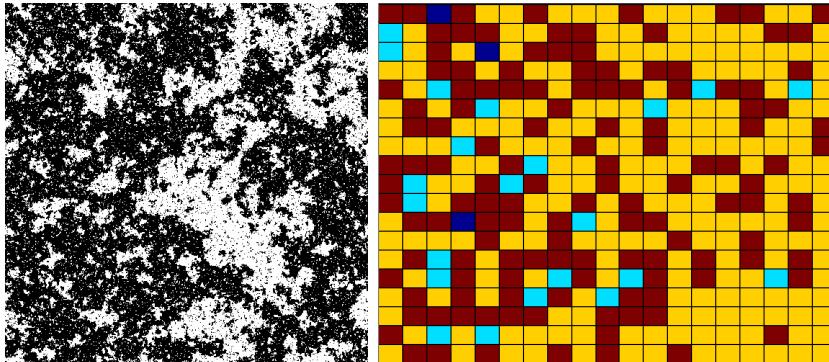


Figura 1: Confronto fra una realizzazione bidimensionale del modello di Ising e i frutti del modello di traffico bidimensionale sviluppato in questa tesi: nel primo gli atomi di un materiale ferromagnetico vengono rappresentati da oggetti a due stati (*spin up, spin down*) e in cui ogni oggetto è capace di comunicare il proprio stato ai primi vicini; nel secondo ciascun sito è uno snodo di una dinamica di veicoli che coinvolge tutto il network bidimensionale e che si traduce in un insieme di un numero arbitrario di stati .

to da eventuali grandezze macroscopiche, e il significato dal punto di vista statistico dell'estrapolazione delle stesse.

Prima di addentrarsi però nel dettaglio di ciò che è stato sviluppato in questo lavoro di tesi, è opportuno dare un rapido sguardo sui metodi storicamente sviluppati per la modellizzazione del flusso su reti urbane.

## Premesse

Lo spunto del presente lavoro nasce dalle problematiche affrontate presso il Laboratorio di Fisica della Città dell'Università di Bologna, presso il quale sono svolte alcune ricerche che, coniugando dati reali di mobilità, analisi statistiche e modelli computazionali cercano di far luce sulle proprietà intrinseche e salienti delle dinamiche della mobilità urbana, nella speranza di produrre spiegazioni del problema che consentano una migliore gestione del traffico ed una sua ottimizzazione.

Lo studio di questi temi, però, viene da più lontano ed è attualmente oggetto di ricerche in varie parti del mondo, per via anche delle sue dirette

connessioni con temi analoghi di smistamento di informazione (ad esempio per le reti informatiche).

## Un po' di storia

Il problema del traffico veicolare, nello specifico, ha cominciato ad essere affrontato in maniera analitica circa cinquant'anni or sono, con un primo approccio essenzialmente empirico. I lavori di allora si limitavano alla raccolta di un ridotto numero di dati sperimentali ottenuti per varie città e alla formulazione di alcune leggi che mettessero in relazione fra loro variabili macroscopiche caratterizzanti il traffico quali la velocità media, il numero medio di veicoli, la densità del reticolo viario. Il limite intrinseco di questi modelli sta nel bisogno di grandi quantità di dati statistici per la deduzione di leggi sufficientemente significative, comunque di natura empirica. Inoltre questi, come molti dei successivi, sono modelli per il traffico su di una sola strada, incentrati sull'interazione veicolo-veicolo, significativi in particolare nel contesto delle vie di grande scorrimento ma meno efficaci nel contesto urbano.

Fra gli anni '50 e '60 furono sviluppati alcuni primi modelli per le sole arterie di traffico principali nelle città, i quali furono poi estesi a network di dimensioni più ampie [10][11][12]. Ad esempio, fu teorizzato in base all'analisi dimensionale che il flusso massimo in ingresso nelle città dovesse esser funzione dell'area della città, della frazione della stessa occupata dalle strade e della "capacità" delle strade, espressa in numero di veicoli per unità di tempo per unità di larghezza di una strada.

Tali modelli, come molti dei successivi, frutto dell'osservazione in varie città (prevalentemente degli USA e del Regno Unito), ipotizzano una relazione sostanzialmente monotona fra velocità e flusso: questa assunzione è manifestamente falsa perché non permette di dare una spiegazione agli stati di congestione in cui flussi e velocità sono molto bassi.

Un approccio molto differente fu proposto nel 1979 da Robert Herman e il premio Nobel Ilya Prigogine, tramite quello che è stato chiamato "modello a due fluidi" [5]. Secondo tale lavoro, la velocità media in un'area urbana risulta essere una funzione del numero di veicoli fermi. Tale modello fu testato

e approfondito, sebbene non al punto da fornire un modello macroscopico dettagliato.

Solo recentemente l'attenzione si è spostata dai modelli di traffico su autostrada o strada a problemi più complessi che coinvolgono intere reti di strade e per i quali cominciano ad esserci anche alcuni dati sperimentali. Sono stati proposti così nuovi modelli, capaci di produrre una serie di riscontri con simulazioni numeriche effettuate su topologie reali o fittizie. Essi forniscono strumenti dinamicamente predittivi delle condizioni di congestione delle reti e dei vari regimi di flusso. Fra questi si distinguono i modelli capaci di esprimere (in maniera analitica o tramite un procedimento dinamico riproducibile con la simulazione) un diagramma fondamentale che associa quella che è chiamata “produzione di traffico” (il numero di veicoli che si muovono per il cammino percorso nell'unità di tempo, o più semplicemente il flusso in uscita) e “l'accumulazione” (vale a dire la densità media di veicoli).

## Il diagramma fondamentale

Nelle prime trattazioni della mobilità veicolare, come abbiamo visto, il punto di vista era incentrato sul moto del singolo veicolo su di un via e la sua interazione con i veicoli circostanti, osservando così fenomeni di regolazione fra i veicoli per il mantenimento di velocità ottimali oppure effetti di congestione, etc. Esiste quindi una vasta gamma di modelli (prevalentemente autostradali) che risultano anche molto dettagliati. Di recente l'attenzione si è spostata sui problemi del traffico sulle reti viarie, in cui l'elemento chiave non è più il veicolo ed il suo moto ma il nodo viario in sé, su cui si incentrano le proprietà di accumulazione e di produzione di traffico. In questo quadro sono stati proposti modelli che contemplano l'esistenza di un “diagramma fondamentale macroscopico” che metta in relazione queste due quantità.

E' stato appunto proposto [3] che per reti urbane dell'ordine di  $5-10 \text{ km}^2$  esista un diagramma fondamentale come quello illustrato in figura 3. Questi diagrammi consentono di “prevedere” il flusso sulla rete data una certa densità di veicoli. Risultati come questi sono ottenibili da un lato tramite simulazioni dettagliate della topologia, dei comportamenti possibili della popolazione dei veicoli (orari di punta, giorno, notte) ma anche riproducibili da

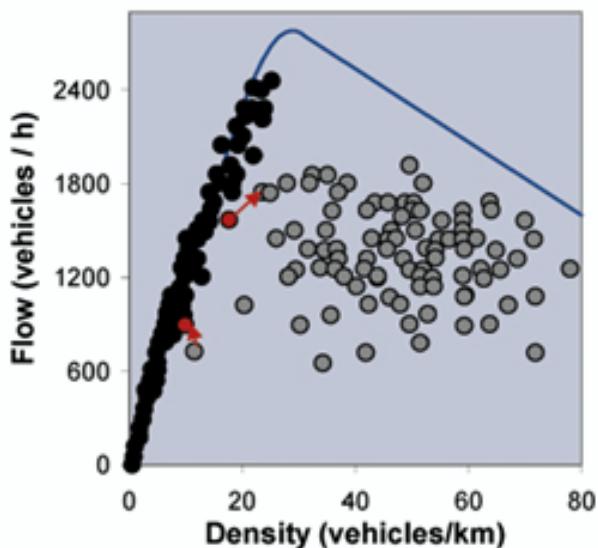


Figura 2: Schema di diagramma fondamentale (linea spessa) e flusso di traffico misurato per un'autostrada tedesca. Il flusso dei veicoli è lineare all'aumentare della densità fino ad un valore critico di 30 veicoli/km. Al di sopra di tale densità, una perturbazione qualsiasi può causare una transizione ad un flusso sincronizzato (freccia rossa in alto a circa 18 veicoli/km) dal quale il sistema non può ritornare se non con un vincolo a valori molto più bassi (freccia rossa in basso a circa 11 veicoli/km) (cfr. [15]).

una serie di esperimenti reali effettuati con una combinazione di dati ottenuti da detector fissi nel reticolo urbano e veri e propri veicoli sonda.

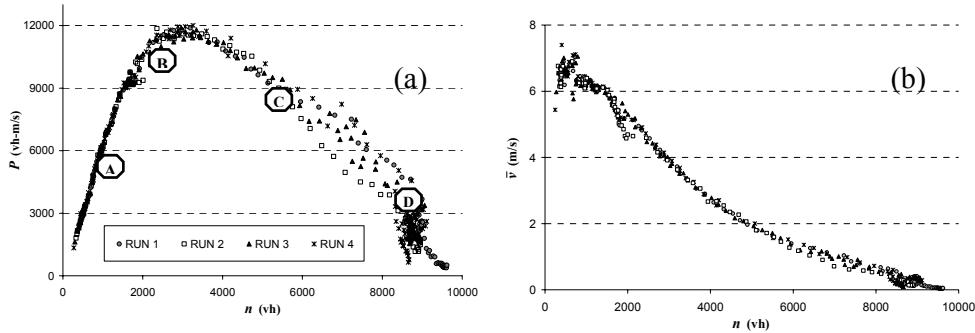


Figura 3: Il diagramma fondamentale macroscopico ottenuto da Geroliminis e Daganzo nel 2007 tramite l'utilizzo di una simulazione rappresentante il distretto degli affari della città di San Francisco (San Francisco Business District). Nel caso (a) viene rappresentato il flusso in uscita rispetto alla densità in ingresso, nel caso (b) la velocità in funzione della densità [1].

I diagrammi fondamentali (MFD, *Macroscopic Fundamental Diagram*) consentono di visualizzare la transizione di fase fra due regimi nel flusso dei veicoli: lo scorrimento libero (*free flow*) e lo stato congestionato (*jam*, da cui in inglese *jamming transition*). La formazione di una congestione per cambiamenti di velocità (ad esempio quando si passa dalla velocità alta delle autostrade a quelle più basse delle strade secondarie) viene considerata come un tipico esempio di “auto-organizzazione”, visto che tipicamente non ci sono agenti esterni capaci di orchestrare il comportamento dei veicoli. Quando le densità di veicoli sono sufficientemente elevate, anche una perturbazione casuale nel flusso di velocità induce una transizione da free flow alla congestione: tale congestione tipicamente si propaga con una certa velocità e cessa di esistere solo quando la densità di veicoli si riduce per qualche motivo (ad esempio, cessazione del flusso in ingresso). I cambiamenti di regime avvengono per un fenomeno che (per esser descritto dettagliatamente), deve tener conto dei tempi di reazione specifici degli automobilisti, delle caratteristiche meccaniche dei veicoli, oltre che delle specificità della rete viaria considerata. Molti modelli però cercano di semplificare il problema in modo da andar-

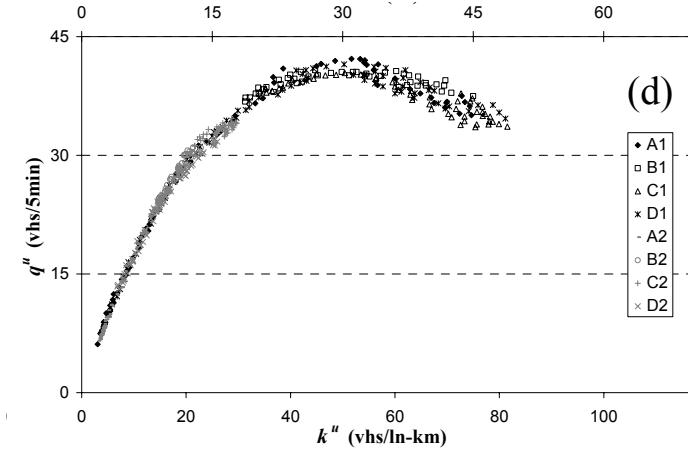


Figura 4: Diagramma flusso/densità ottenuto da A. Geroliminis con esperimenti reali sulla città di Yokohama [1].

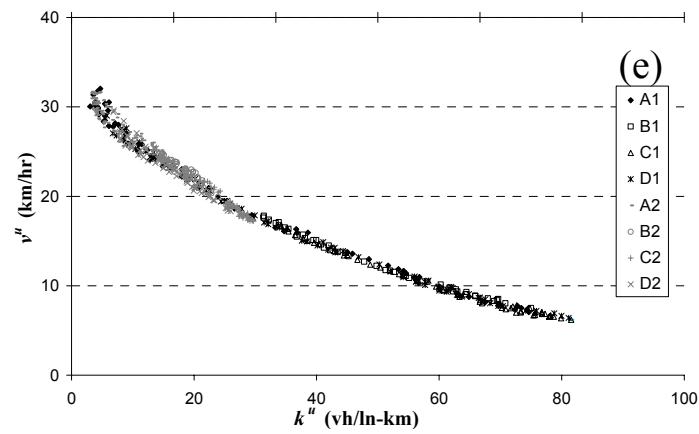


Figura 5: Diagramma velocità/densità ottenuto da Geroliminis con esperimenti reali sulla città di Yokohama [1].

ne al cuore e individuare gli elementi chiave che portano ed eventualmente regolano la transizione.

## Modelli e simulazioni

Esistono dunque varie famiglie di modelli, più o meno dettagliati. Molti di questi fanno affidamento sulla simulazione come strumento di indagine preventiva, capace di verificare o meno un'ipotesi. Si hanno simulazioni con automi “intelligenti” in cui viene appunto rappresentato e studiato il comportamento dei veicoli e l'influenza delle loro scelte sul diagramma fondamentale, o modelli più semplici in cui, senza alcuna richiesta di coscienza da parte dei veicoli virtuali, si studia come l'interazione stessa fra questi oggetti possa produrre la transizione di cui sopra. Il lavoro di questa tesi appartiene più a questa seconda classe che alla prima.

## Le direzioni d'indagine in questa tesi

L'obiettivo del presente lavoro è appunto quello di esplorare con un modello semplice la dinamica che produce i diagrammi fondamentali di cui sopra, con la transizione di fase cercata. Per fare ciò, ci si è mossi in alcune direzioni diverse:

1. abbiamo innanzitutto rivolto l'attenzione ad un modello unidimensionale semplice, consapevoli dei grandi limiti di un tale approccio (le città non sono unidimensionali....) ma motivati dalla convinzione che l'esplorazione di questo caso relativamente semplice (con alcune inevitabili patologie topologiche) possa fare luce su quanto, in maniera più ricca, si sviluppa nella realtà bidimensionale di tutti i giorni;
2. di tale modello semplice è stata cercata una forma ancora più essenziale, che trasformasse la dinamica veicolare in una dinamica di network, invertendo il punto di vista (non più centrato sui veicoli singoli, ma sulle densità di code formate): in questo caso lo scopo è stato quello di impostare un approccio che descrivesse il sistema in termini di densità e probabilità;

3. abbiamo esteso il modello alle due dimensioni, raccogliendo somiglianze e differenze con il caso unidimensionale e facendo anche alcune simulazioni della propagazione della congestione sul network;
4. l'obiettivo di spiegare il sistema come una catena di stati accessibili secondo un'opportuna distribuzione di probabilità ha portato ad una sua rilettura in termini di catene di Markov: in questo modo viene tratteggiata la sostanza della transizione dal flusso libero al flusso congestionato.

Alle conclusioni, infine, è affidato il compito di delineare i possibili sviluppi delle ricerche compiute.



# Capitolo 1

## Modello Unidimensionale

Lo studio di un problema di flussi su network si presta naturalmente ad un approccio di tipo simulativo: tramite la programmazione ad oggetti, infatti, risulta naturale rappresentare i nodi e le eventuali particelle scambiate fra ogni nodo tramite opportune classi con metodi e proprietà. In tal modo si può effettuare un “esperimento virtuale”, da utilizzare come raffronto per l’analisi e i modelli successivi.

### 1 Premesse generali

Prima di approfondire l’analisi del modello volto ad illustrarci le proprietà essenziali della dinamica sul toro, dedichiamo qualche paragrafo ad alcune precisazioni terminologiche.

#### Transizioni di fase

In termodinamica, le *transizioni di fase* sono definite come relazioni non analitiche fra due osservabili termodinamici. Nel caso dei sistemi dinamici, e quindi anche nel nostro, esse si traducono in evidenti cambiamenti dell’andamento della funzione che esprime la relazione fra le grandezze in questione (discontinuità o azzeramenti della funzione o della sua derivata).

## Ergodicità

Chiamiamo *ergodico* un sistema dinamico che a partire da una condizione iniziale esplori tutto lo spazio degli stati su cui è definita la dinamica. Una singola realizzazione del nostro processo di attraversamento, come si vedrà dettagliatamente più avanti, non è ergodica.

## Campo medio

Quando parliamo di *modello di campo medio*, o più semplicemente di *campo medio*, intendiamo un insieme di ipotesi e di relazioni incentrate sui valori medi degli osservabili in questione. Un modello di campo medio, nel nostro caso, ci descrive il comportamento non della velocità media dei veicoli in una qualsiasi evoluzione sul toro unidimensionale, bensì il valore medio che la velocità avrebbe se facessimo molti viaggi sul toro, partendo da condizioni iniziali differenti. Non possiamo invece avere un modello per la velocità media su singola realizzazione perché la singola realizzazione non è *ergodica*, nel senso spiegato in precedenza.

## 2 Modello dettagliato a code infinite

Per l'analisi unidimensionale della dinamica di traffico su rete abbiamo costruito un modello (cfr. Appendice A per maggiori dettagli) che ha tre caratteristiche essenziali:

- la catena unidimensionale chiusa che formiamo è composta da siti che chiameremo *semafori* che sono caratterizzati da una funzione periodica che ne definisce il tempo di apertura (*frazione di verde*) e chiusura (*frazione di rosso*);
- i veicoli che si muovono di sito in sito compiono una dinamica ad uno step, ovverosia si muovono da un semaforo al successivo (quando possono) in un solo step temporale, e tale spostamento è il massimo consentito in un solo passo;
- i veicoli interagiscono fra di loro di modo che, se un sito è già occupato, il veicolo che subentra si mette in coda.

Data questa semplice dinamica si può costruire un modello che mostri i tratti essenziali (quali una sorta di diagramma fondamentale) dei modelli a scala bidimensionale.

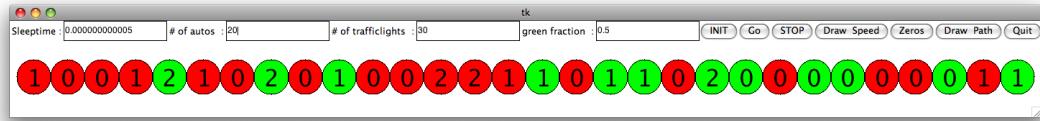


Figura 1.1: La veste grafica del modello dettagliato: il toro di semafori può essere rappresentato come una stringa di  $J$  cerchi colorati, ciascuno contrassegnato da un numero che indica la lunghezza della coda a quel semaforo. La testa e la coda della stringa sono da immaginare, ovviamente, connesse.

Con queste convenzioni, possiamo già scrivere cosa ci aspettiamo, a priori, che il modello produca e quindi anticipare un embrionale modello di campo medio.

## 2.1 Modello di campo medio

Per praticità nel seguito dell’analisi, fissiamo la notazione:

- il toro è composto da  $J$  semafori;
- tutti i semafori hanno un ciclo temporale  $c$  intero suddiviso in  $fc$  istanti di “verde”, in cui ai veicoli è consentito il transito, e  $(1 - f)c$  istanti di “rosso”: chiamiamo  $f$  *frazione di verde*;
- il toro viene popolato da  $N$  veicoli;
- sia  $T_{max}$  la durata totale dell’evoluzione temporale.

Consideriamo come osservabile privilegiato del sistema la velocità media della popolazione del toro. Essa può essere banalmente registrata nell’evoluzione come la media su tutti i veicoli del rapporto fra la distanza totale percorsa da un veicolo e la durata dell’esecuzione, ossia

$$\langle v \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{T_{max}} \quad (1.1)$$

in cui  $s_i$  è il cammino percorso da ogni  $i$ -esimo veicolo. Per costruzione del modello

$$\langle v \rangle_t \leq 1 \quad (1.2)$$

Chiaramente, per un solo veicolo e con i semafori tutti verdi, si ha esattamente

$$\langle v \rangle_t = 1 \quad (1.3)$$

In generale, se le fasi iniziali dei semafori che costituiscono il toro sono scelte casualmente, possiamo aspettarci ragionevolmente che ad ogni istante di tempo, in media, il numero di semafori verdi sia circa

$$J_g \approx fJ \quad (1.4)$$

e visto che il nostro modello prevede che il minimo tempo d'attraversamento ( $\Delta t = 1$ ) sia speso proprio sui semafori verdi, la velocità media (ad esempio per fare un giro del toro) deve essere

$$\langle v \rangle_t \leq \frac{fJ}{J} = f \quad (1.5)$$

L'entità dello scostamento dal valor  $\langle v \rangle_t = f$  dipende chiaramente dalla dinamica sui semafori rossi: ci si può quindi aspettare che la velocità diminuisca all'aumentare del valore della durata del ciclo semaforico  $c$  e che inoltre si riduca all'aumentare delle code sui semafori, ossia della densità  $\rho = N/J$  del toro.

Se vogliamo considerare l'andamento della velocità all'aumentare della densità, ci aspettiamo infine che

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \langle v \rangle_t = 0 \quad (1.6)$$

## 2.2 Risultati numerici

Tramite un opportuno codice in C++, è possibile implementare il modello ed esplorarlo variando i valori dei parametri. Innanzitutto abbiamo affrontato il problema più semplice: un solo veicolo che si muove sul toro. Notiamo

che tutti i ragionamenti che facciamo sono *in media*, ossia suppongono l'esecuzione di varie prove, ciascuna differente per condizioni iniziali (popolazione dei semafori e fasi iniziali dei semafori): la singola evoluzione temporale del sistema non è rappresentativa del suo comportamento. Parliamo dunque di *media sulle condizioni iniziali* e non solo sul numero di veicoli o il tempo totale di esecuzione.

### Un solo veicolo

Sebbene possa sembrare banale, il regime in cui il toro è poco popolato è quello più delicato, proprio perché più sensibile alle modifiche dei parametri. Se prendiamo un singolo veicolo ed eseguiamo varie simulazioni con diversi valori della frazione di verde  $f$ , otteniamo un grafico come quello in figura 1.2 per la relazione  $v(f)$ . Similmente si può produrre un grafico per la dipendenza dal ciclo del semaforo  $c$  (cfr. fig.1.3). Per spiegare queste curve, cerchiamo di costruire un'equazione di “campo medio”, in cui, cioè, facciamo riferimento ad un'ipotetica situazione tipica, una condizione media nella quale il veicolo possa trovarsi. A rigore, tale condizione media è quella che riproduciamo mediando il nostro osservabile (la velocità media di un veicolo per una evoluzione) su varie prove, nel limite di un grande numero di prove.

Se ci mettiamo in quest'ottica, possiamo allora pensare che la velocità media cui facciamo riferimento non è altro che l'inverso del tempo medio di attraversamento di un semaforo, ossia, banalmente

$$\langle v \rangle_{singolo} = \frac{1 \text{ step}}{\langle T \rangle_{singolo}} \quad (1.7)$$

E' sufficiente dunque valutare il tempo d'attesa. Cominciano qui, quindi, i ragionamenti in media su tutte le condizioni iniziali possibili per un solo veicolo, il che vuol dire, in sostanza, mediare su tutti gli sfasamenti possibili fra semafori.

Il tempo d'attesa medio su di un semaforo verde è, per costruzione del modello, esattamente pari a 1 turno, ossia

$$\tau_g = 1 \quad (1.8)$$

Il numero di semafori verdi è, in media, dato da

$$n_g = f J \quad (1.9)$$

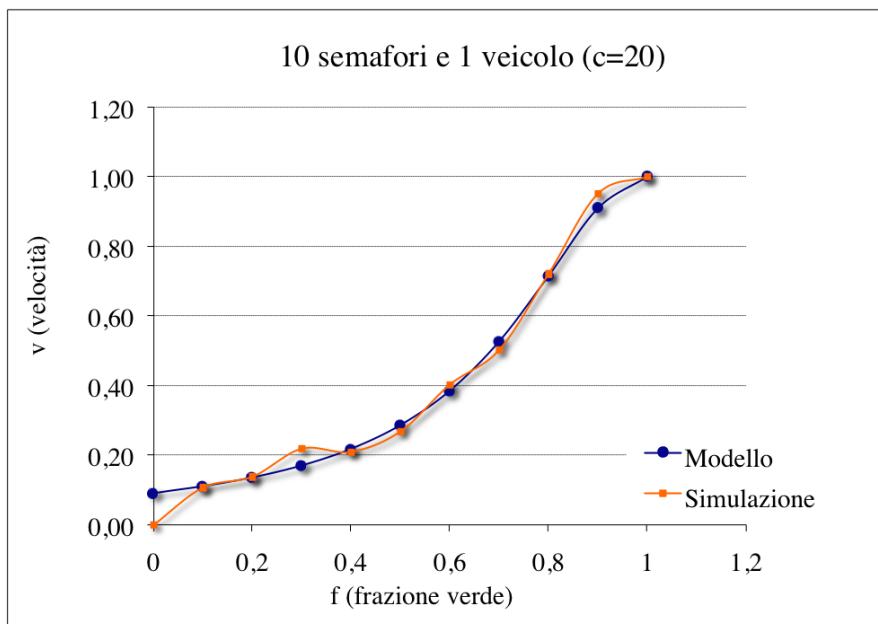


Figura 1.2: In arancio l'andamento della velocità media per un singolo veicolo al variare della durata del tempo di verde. In blu viene rappresentato il modello costruito tramite ipotesi di campo medio, espresso dall'eq. 1.14. Come si vede il modello è valido ovunque tranne nella regione limite per cui tutti i semafori sono sempre rossi (che ovviamente non è ben definita essendo il punto per il quale il modello perde di significato).

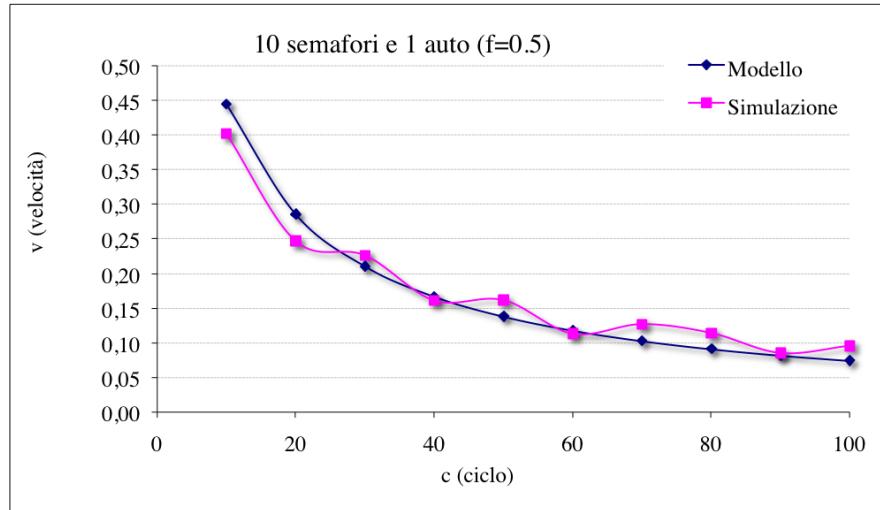


Figura 1.3: In fucsia l'andamento della velocità media per un singolo veicolo al variare della durata del ciclo del semaforo. In blu viene rappresentato il modello costruito tramite ipotesi di campo medio, espresso dall'eq. 1.14.

in cui  $J$  è il numero totale di semafori.

Il tempo medio d'attesa sui verdi è dunque dato dalla media su di un giro, per cui

$$\langle T \rangle_g = \tau_g \frac{n_g}{J} = 1 \cdot \frac{fJ}{J} = f \quad (1.10)$$

Bisogna ora solo valutare il tempo d'attesa sui semafori rossi.

Essi sono in media nel numero di

$$n_r = (1 - f)J \quad (1.11)$$

L'attesa media su di un semaforo rosso va trattata con accuratezza. Si fanno le seguenti osservazioni:

- è incluso nell'attesa il tempo di conversione del semaforo da rosso a verde;
- in media, un veicolo capita su di un semaforo a metà del suo ciclo;
- è comunque necessario attendere un turno per passare.

Combinando queste condizioni, si ottiene facilmente

$$\tau_r = 1 + \left( \frac{c}{2} + 1 \right) (1 - f) \quad (1.12)$$

Per cui

$$\langle T \rangle_r = (1-f) \left( 1 + \left( \frac{c}{2} + 1 \right) (1-f) \right) \quad (1.13)$$

Quindi, riassumendo il tutto ed esprimendo in termini della velocità

$$\langle v \rangle_{singolo} = \frac{1}{f + (1-f) \left( 1 + \left( \frac{c}{2} + 1 \right) (1-f) \right)} \quad (1.14)$$

e come si può vedere dalle fig. 1.2 e 1.3 l'espressione spiega bene le simulazioni.

### Molti veicoli

Se accresciamo la popolazione del toro, la velocità media di attraversamento diminuisce gradualmente, andando asintoticamente ad annullarsi, ma con un punto di flesso per valori di densità di poco superiori all'unità, come mostrato in figura 1.4. Tale punto di flesso ci indica una transizione da un regime in cui il toro è poco popolato dai veicoli che quindi interagiscono poco fra di loro ad un secondo regime (tramite un processo graduale) in cui ogni veicolo risente della presenza di un vicino e quindi si sincronizza con esso. Vista la dipendenza lineare rispetto al tempo, il grafico e la transizione risultano particolarmente più facili da leggere che nella relazione velocità/numero di veicoli .

In questo modo otteniamo curve semplici (cfr. fig. 1.6), per le quali, sempre con ragionamenti in media, è possibile ricostruire delle espressioni analitiche, almeno per i due comportamenti principali, mentre la transizione risulta meno semplice da spiegare.

- $\rho = \frac{N}{J} < 1$  : Quando il toro è poco popolato, per spiegare l'andamento della velocità è sufficiente riprendere l'espressione per il singolo veicolo (cfr. eq. 1.14) e considerare che la lunghezza media di una coda è pari a

$$\langle L_{coda} \rangle = \frac{N}{J} \quad (1.15)$$

Se si assume che un veicolo può con eguale probabilità incontrare una coda breve come una coda lunga, l'attesa media in coda risulta

$$\langle L_{coda} \rangle = \frac{\langle L_{coda} \rangle}{2} = \frac{N}{2J} \quad (1.16)$$

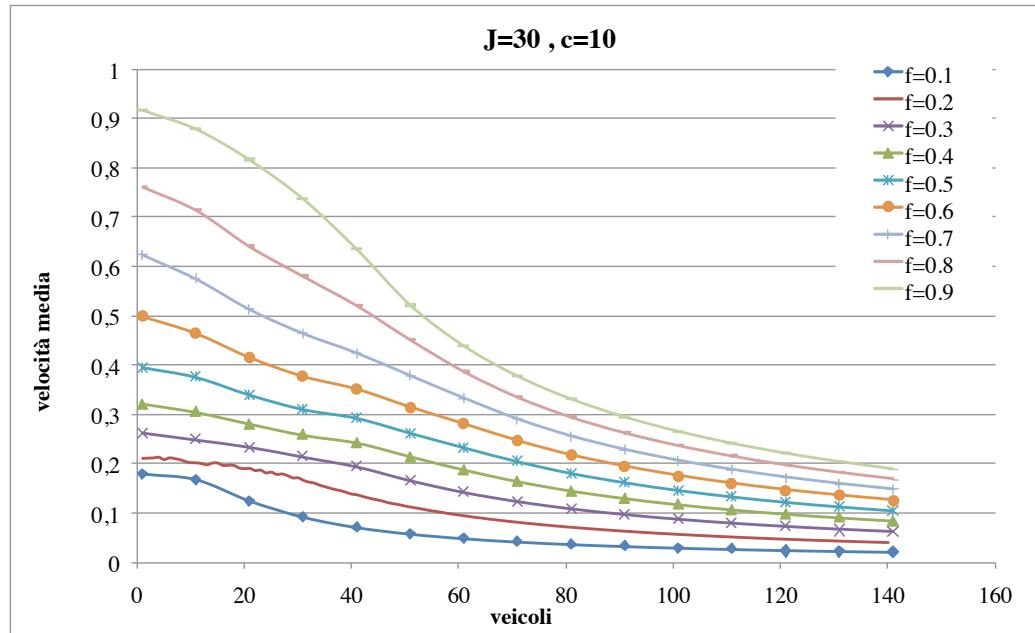


Figura 1.4: La velocità media di attraversamento per un toro di  $J=30$  semafori al variare del numero  $N$  di veicoli e della frazione di verde  $f$ . Si noti la difficile leggibilità del tratto iniziale del grafico in cui si ha una lenta discesa della velocità iniziale. La lettura si semplifica

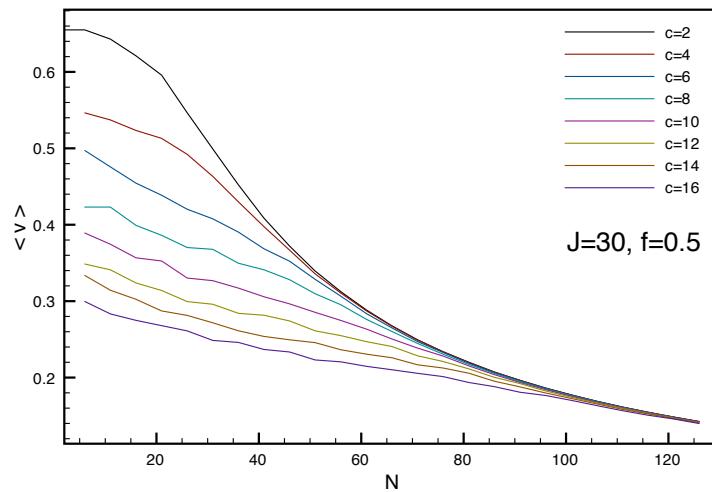


Figura 1.5: La velocità media di attraversamento per un toro di  $J=30$  semafori al variare del numero  $N$  di veicoli e della durata del ciclo  $c$ .

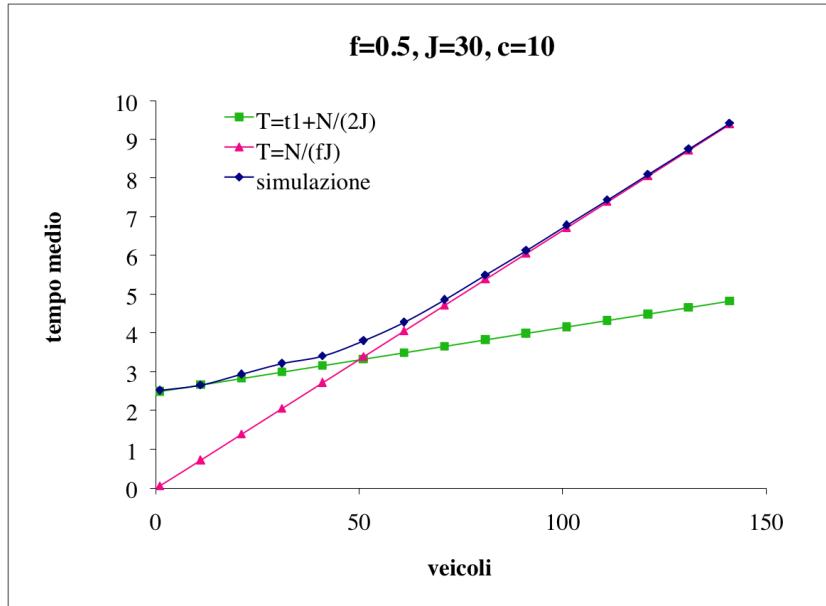


Figura 1.6: La velocità media di attraversamento per un toro di  $J=30$  semafori per  $f=0.5$ , con in evidenza i due andamenti con la loro espressione analitica.

per cui si ottiene

$$\langle v \rangle_{\rho < 1} (N) = \frac{1}{f + (1-f) \left( 1 + \left( \frac{c}{2} + 1 \right) (1-f) \right) + \frac{N}{2J}} \quad (1.17)$$

- $\rho = \frac{N}{J} \gg 1$  : Si ha un regime asintotico in cui tutti i semafori hanno almeno un veicolo in coda. Ciò che conta a questo punto è solo e unicamente il numero di veicoli che si possono muovere (le teste delle code, esattamente in numero di  $fJ$ ) rispetto al numero totale di veicoli. La velocità si esprime allora banalmente come

$$\langle v \rangle_{\rho \gg 1} (N) = \frac{fJ}{N} \quad (1.18)$$

Queste semplici osservazioni risultano valide in vari regimi, anche modificando il valore dei parametri, come viene illustrato nelle figure seguenti.

La transizione da un regime all'altro non è però spiegabile altrettanto banalmente. Osserviamo che la sua natura deve necessariamente dipendere dal passaggio da un regime nel quale esistono molti siti la cui coda è di lunghezza nulla (regime a bassa densità) ad un regime in cui tali siti semaforici non esistono più. Notiamo inoltre che questi ragionamenti hanno senso solo

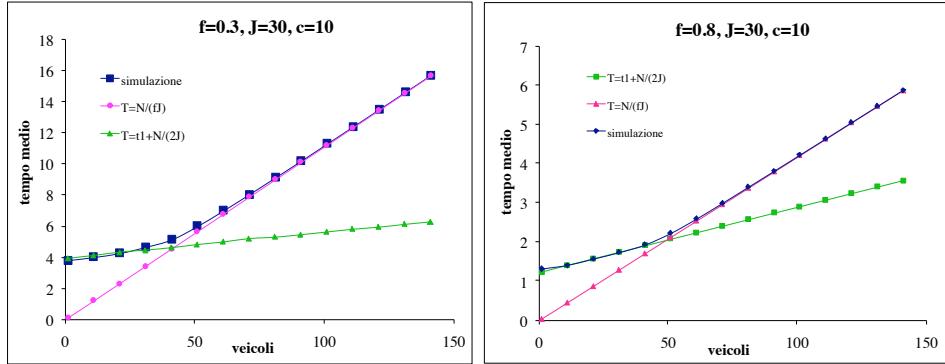


Figura 1.7: La velocità media di attraversamento per un toro di  $J=30$  semafori per  $f=0.3$  e  $f=0.8$ , con in evidenza i due andamenti con la loro espressione analitica. Si vedono bene in entrambe le figure i due regimi dinamici, e si può quindi notare la validità del modello al variare dei parametri (in questo caso sono state prese due condizioni opposte per la frazione di verde  $f$ ).

nella misura in cui prendiamo un grande numero di condizioni iniziali che consentono di esplorare le varie configurazioni possibili del sistema. Da una evoluzione singola del sistema non si estraе nulla di significativo, e, viceversa, queste stime di velocità media nulla ci dicono sulla singola evoluzione.

### 3 Code finite

Il modello unidimensionale così impostato risente (come si vedrà in particolare nel prossimo capitolo) di una serie di effetti patologici indotti proprio dalla sua bassa dimensionalità. Fra questi, uno dei più evidenti ed irrealistici è la possibilità di avere code infinite su ogni sito semaforico. E' possibile però facilmente estendere ed arricchire questo modello aggiungendo un limite alla lunghezza possibile delle code sui semafori. Ciò equivale a considerare (in qualche modo) un effetto di volume finito dei veicoli e di distanza fra i semafori, arricchendo così implicitamente la topologia che altrimenti è abbastanza essenziale.

E' evidente che in questo modo si limita anche il numero massimo di veicoli che possono circolare. Gli andamenti che si producono, però, per le relazioni di velocità/densità ci aspettiamo siano più rispondenti alla realtà.

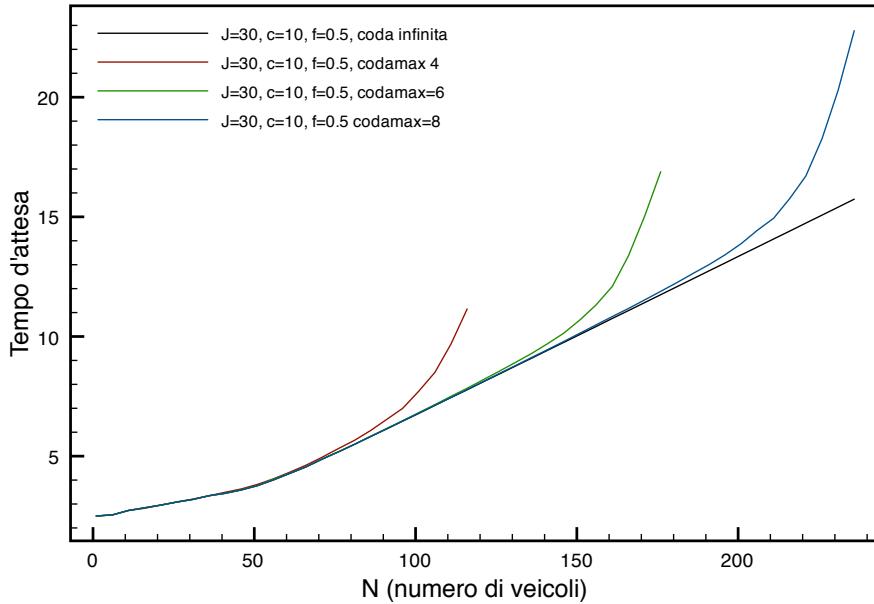


Figura 1.8: Il modello a code infinite e vari modelli a code finite a confronto

Ciò che si ottiene è nuovamente una transizione (del secondo ordine) verso un regime (evidentemente non raggiungibile) in cui il tempo di percorrenza risulta infinito. Essa è collocata (comprensibilmente) nella regione per la quale in media ogni sito semaforico ha code lunghe  $\max(coda) - 1$ , e nel quale evidentemente diventa significativa la presenza del limite superiore.

L'andamento della transizione suggerisce una somiglianza con la prima transizione incontrata, sebbene non vi sia un andamento asintotico raggiungibile da poter estrapolare. Nel capitolo seguente verrà mostrato come questa relazione produca un primitivo diagramma fondamentale.

## 4 In sintesi

Con un modello semplice di dinamica unidimensionale abbiamo ottenuto il diagramma fondamentale per la relazione velocità/densità al variare dei parametri di controllo caratteristici del sistema: nel caso che non tiene code del volume finito delle automobili, e in cui quindi possono formarsi code infinite, si hanno due regimi (flusso libero, e flusso congestionato), di cui si è costruita un'espressione analitica; nel caso in cui invece le code sono finite, si

hanno tre regimi. Ciò che non è chiaramente espresso è il processo dinamico che porta alla transizione da un regime all'altro.

Nel prosieguo del lavoro esploreremo nel dettaglio la natura delle transizioni, mettendo in luce le specifiche proprietà statistiche del processo costruito.



# Capitolo 2

## Modello della transizione

In questo capitolo vedremo come costruire un modello semplificato e performante dal punto di vista computazionale della dinamica unidimensionale illustrata nel capitolo precedente. Ciò ci consentirà anche di mettere in luce gli aspetti centrali della transizione di fase fra il regime libero e quello condensato.

### 1 Ipotesi sulla transizione

Dal modello di campo medio discusso precedentemente emerge che la velocità media di percorrenza del toro unidimensionale segue due andamenti, con una transizione del secondo ordine dall'uno all'altro secondo il parametro d'ordine della densità  $\rho = N/J$  quando appunto  $\rho \approx 1$ .

Questo risultato ci suggerisce un modo diverso di rileggere il sistema: per la dinamica, ciò che più conta è l'avere o non avere dei siti semaforici senza alcuna coda, ovvero con coda nulla. Sul modello delle espressioni formulate in precedenza, possiamo fare la seguente congettura: se chiamiamo  $p_0 = p_0(\rho, f, c)$  la probabilità di avere un semaforo a coda nulla su di un toro popolato in modo da avere densità  $\rho$ , con parametri dinamici  $f$  e  $c$ , allora diciamo che la velocità di percorrenza del toro dipende solo da quella frazione di veicoli che sono su semafori verdi, ovvero dai semafori che sono e verdi ed

hanno coda non nulla. In altre parole, ipotizziamo che

$$\langle v \rangle = (1 - p_0) \frac{fJ}{N} = (1 - p_0) \frac{f}{\rho} \quad (2.1)$$

Discutiamo un attimo questa espressione. Evidentemente essa non risolve il problema di avere una forma chiusa per la determinazione della velocità, ma lo pone in maniera differente: spiegare il problema della velocità media di percorrenza diviene un problema di comprensione dei flussi di probabilità sulla catena toroidale di semafori. Rispetto alle equazioni 1.17 e 1.18, la dipendenza dalla scala di tempi  $c$  viene nascosta all'interno di  $p_0$ , ma, nel momento in cui il toro è molto popolato, abbiamo subito che

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} p_0 = 0 \quad (2.2)$$

per cui

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \langle v \rangle = \lim_{\rho \rightarrow 1} (1 - p_0) \frac{f}{\rho} = \frac{f}{\rho} \quad (2.3)$$

che è proprio l'eq. 1.18.

Se andiamo a verificare questa ipotesi andando esattamente a contare il numero medio di siti nulli nelle nostre evoluzioni e confrontando questa formula con la simulazione, otteniamo (come si vede in figura 2.1) un buon accordo che ci consente di proseguire nella trattazione.

## 2 Costruzione di un modello dinamico semplificato

### 2.1 Code infinite

Avendo spostato l'attenzione da un modello della dinamica basato sul campo medio ad uno incentrato sulle probabilità, possiamo ripensare la dinamica (originariamente strutturata sull'algoritmo della simulazione) vedendone i suoi aspetti più essenziali e in questo modo anche ottenendo un algoritmo più performante.

Il problema che stiamo affrontando, infatti, non è altro che l'analisi di un sistema così composto:

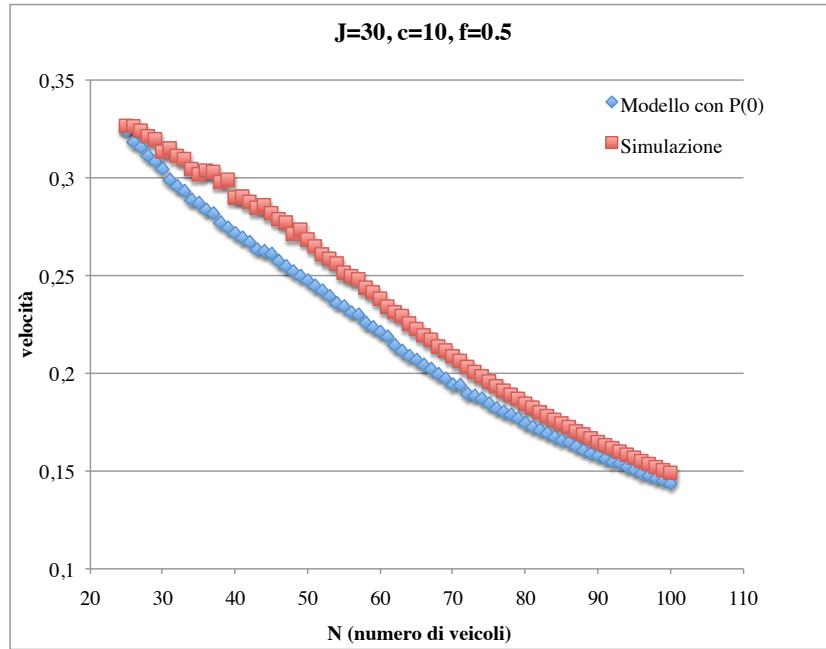


Figura 2.1: Confronto fra la velocità media ottenuta dalle simulazioni per un toro di  $J=30$  con  $c=10$  e  $f=0.5$  e l'equazione 2.1 valutata contando il numero medio di siti vuoti nelle varie evoluzioni.

- da un lato c'è una dinamica temporale intrinseca che è la dinamica dei semafori. Possiamo infatti pensare che, una volta scelto lo sfasamento esistente fra un semaforo e il successivo, esso viene conservato dalla dinamica di switch periodica definita dalla funzione semaforica che, per ogni  $j$ -esimo semaforo, è scrivibile così

$$F_j(\tau, \phi_j) = \theta(\tau - \phi_j)\theta(fc + \phi_j - \tau) \quad (2.4)$$

in cui  $\tau = t \bmod c$ ,  $\phi_j$  è lo sfasamento del  $j$ -esimo semaforo e  $\theta$  è la funzione di Heaviside.

- dall'altro esiste la dinamica dei veicoli che si muovono sui semafori e formano le code, le quali vengono a costituire una proprietà per ciascun semaforo. Questa dinamica (che è quella che poi ci interessa veramente) è intimamente legata alla precedente, perché se consideriamo ad esempio un qualunque semaforo in particolare, la sua transizione da uno stato con una coda lunga  $k$  ad un pari a  $k + 1$  dipende dallo stato di colore del semaforo precedente, e quindi dalla dinamica di switch.

Separate queste due dinamiche, possiamo ripensare il modello originario e scriverlo come un processo nel quale per ogni  $j$ -esimo semaforo possiamo definire una funzione  $P_j(k, t)$  che per ogni  $k$  compreso fra 0 e  $N$  ci dice se il semaforo in questione ha ( $P=1$ ) o non ha ( $P=0$ )  $k$  veicoli in coda.

Possiamo così reimpostare il problema come segue.

Consideriamo un toro di  $J$  semafori di ciclo di durata  $c$ , con frazione di verde  $f$  e  $N$  veicoli che vi circolano sopra.

Se definiamo  $p_{j,j+1}(t)$  la probabilità che ci sia il passaggio di un veicolo dal sito  $j$  al successivo al tempo  $t$  e  $p_{j-1,j}(t)$  quella dell'ingresso di un veicolo, e le esprimiamo come

$$p_{j,j+1}(t) = (1 - P_j(0, t))F_j(t) \quad (2.5)$$

$$p_{j-1,j}(t) = (1 - P_{j-1}(0, t))F_{j-1}(t) \quad (2.6)$$

e rispettivamente anche:

$$q_{j,j+1}(t) = 1 - p_{j,j+1}(t) \quad (2.7)$$

$$q_{j-1,j}(t) = 1 - p_{j-1,j}(t) \quad (2.8)$$

in cui  $F$  è la funzione periodica che individua lo stato operativo del semaforo.

Abbiamo allora che in generale la dinamica risulta espressa da

$$\begin{aligned} P_j(k, t+1) &= P_j(k-1, t)q_{j,j+1}(t)p_{j-1,j}(t) + P_j(k+1, t)p_{j,j+1}(t)q_{j-1,j}(t) \\ &+ P_j(k, t)(p_{j,j+1}(t)p_{j-1,j}(t) + q_{j,j+1}(t)q_{j-1,j}(t)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

in cui va tenuto in conto il fatto che per

- $k = 0 \rightarrow P_j(k-1, t) = 0$
- $k = N \rightarrow P_j(k+1, t) = 0$

Le equazioni vengono dalla seguente osservazione: la probabilità di avere almeno un veicolo su di un semaforo  $j$  è

$$P_j(k > 0, t) = \sum_{i=1}^N P_j(i, t) = 1 - P_j(0, t) \quad (2.10)$$

per cui, dato almeno un semaforo, la possibilità di passare da un semaforo al successivo è appunto il prodotto fra tale probabilità e la funzione di switch  $F$ .

Possiamo quindi immaginare  $P_j(k, t)$  come una matrice  $P_{kj}(t)$  che evolve in base alle equazioni riassunte nell'eq. 2.9. E' dunque possibile scrivere un programma che senza far ricorso alla programmazione ad oggetti, senza il bisogno di tener traccia degli spostamenti dei vari veicoli (i veicoli di fatto non esistono neanche, ma solo la lunghezza delle code) simula la dinamica, in maniera completamente equivalente a quanto descritto nel capitolo precedente.

```
t=0 : 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 2 0 0 1 2 0 1 1 0 2 0 1 1 1 1 2 0 0

t=1 : 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 2 0 0 0 2 1 0 1 1 1 1 1 0 1 2 1 0

t=2 : 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 2 1 0 0 1 1 1 1 0 2 1 0 1 1 1 2 0

t=3 : 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 2 1 0 2 1 0 0 2 0 3 0
```

Figura 2.2: Le rappresentazione di un toro di  $J=30$  semafori e con  $N=20$  veicoli sotto forma di stringa numerica ed alcuni step della sua evoluzione per  $f=0.5$  e  $c=10$ .

E' dunque sufficiente usare questa nuova dinamica con vari set di condizioni iniziali per riprodurre i risultati sulla velocità media dei veicoli in nuovi termini (appunto, in termini di distribuzioni di veicoli) per il sistema a code infinite. Bisogna osservare, tuttavia, che il modello mostra chiaramente gli aspetti non lineari del problema, con le probabilità di transizione che vengono a dipendere direttamente dal livello di popolazione del semaforo. Da qui viene la difficoltà nell'approccio analitico al problema e alla sua risoluzione.

## 2.2 Code finite

Quando consideriamo di avere le code finite, possiamo ben dire che in questo caso la transizione verso tempi infiniti di percorrenza del toro dipende

sostanzialmente da quanti siti sono “quasi pieni”, vale a dire che se  $M$  è la lunghezza massima consentita per le code, allora i siti rilevanti saranno quelli che posseggono  $M - 1$  elementi in coda. Nei fatti la logica è la stessa della transizione discussa nel paragrafo precedente, ma nella quale bisogna immaginare che non sono più i siti vuoti a muoversi sul toro, bensì le “lacune” che mancano al completamento delle code. Se indichiamo con  $S(M - 1)$  il

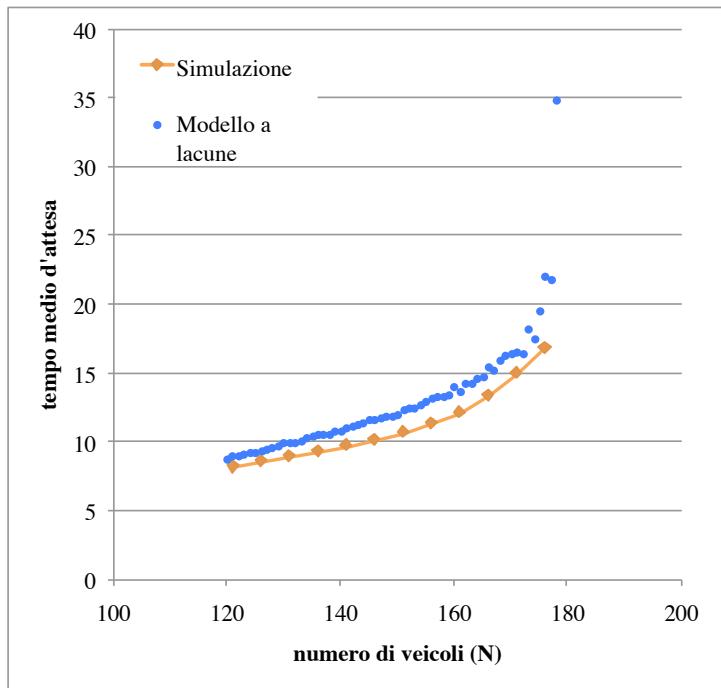


Figura 2.3: Il modello e la simulazione a confronto.

numero di siti di questo genere, allora è facile ricostruire la relazione per la transizione di fase in quel regime. Il tempo medio di attesa risulta essere

$$\langle T \rangle = \frac{N}{\left(1 - \frac{S(M-1)}{JM-N}\right) f J} \quad (2.11)$$

La bontà di questo modello è dimostrata dalla figura 2.3.

### 3 Proprietà statistiche del modello

Il nuovo modello dinamico illustrato comporta un miglioramento in termini di tempi di esecuzione del programma, ma permette anche di studiare

le proprietà statistiche del sistema in maniera più naturale, descrivendo semplicemente un qualsiasi stato del sistema come una stringa numerica lunga  $J$  (numero di semafori), e di cui ci interessa, per quanto detto in precedenza, il contenuto di siti vuoti, vale a dire quanti elementi di quella stringa sono nulli.

Questo permette di affrontare il problema da un altro punto di vista: quello delle caratteristiche statistiche della dinamica.

### 3.1 Periodicità

Consideriamo come osservabile naturale la probabilità di avere un sito vuoto  $p_0(\rho, c, f)$ . Essa corrisponde chiaramente al rapporto fra il numero medio di siti vuoti e il numero totale di siti. Dunque

$$p_0(\rho, c, f) = \frac{\langle S(0, t) \rangle}{J} = \frac{E[\sum_{j=1}^J \langle P_j(0, t) \rangle_t]}{J} \quad (2.12)$$

in cui abbiamo fatto uso della definizione di  $P_j(k, t)$  data in precedenza ed implicitamente definito  $S(0, t)$  e in cui  $E[\cdot]$  indica la media sulle condizioni iniziali (indicata anche semplicemente con  $\langle \cdot \rangle$ ) e  $\langle \cdot \rangle_t$  quella temporale.

A priori, conosciamo poco di  $S(0, t)$ . Sappiamo che, banalmente, per  $N < J$  si ha

$$\max(S(0, t)) = J - N \quad (2.13)$$

nel caso ossia in cui tutti gli  $N$  veicoli siano su  $N$  semafori distinti dei  $J$  possibili. Nel nostro modo di scegliere la condizione iniziale, abbiamo che ovviamente non è altamente probabile ottenere una tale distribuzione. Facendo qualche conto di calcolo combinatorio, si vede facilmente che assegnando un veicolo su un sito scelto a caso fra i  $J$  disponibili, il numero medio di siti che non vengono scelti (quindi corrispondente al valore medio di  $S(0, t)$  al tempo  $t=0$ ) è pari a

$$\langle S(0, 0) \rangle = J \left( \frac{J-1}{J} \right)^N \quad (2.14)$$

Non sappiamo però quale sia la sua evoluzione temporale. Se facciamo alcune simulazioni, vediamo che il processo che ha luogo (cfr. fig.2.4) per una singola condizione iniziale ha delle caratteristiche periodiche.

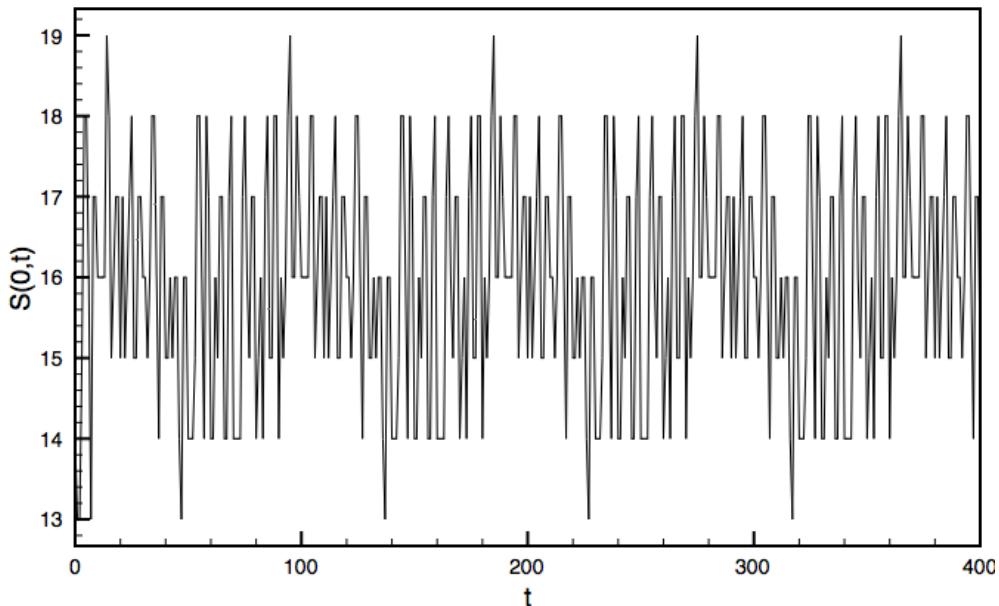


Figura 2.4: L'evoluzione temporale del numero di siti a coda nulla per  $N=20$ ,  $J=30$ ,  $c=10$ ,  $f=0.5$  per una singola condizione iniziale.

Il sistema risente in maniera evidente della periodicità data dalla dinamica dei semafori. Tale condizione periodica viene raggiunta dopo un transiente iniziale. Raggiunto il ciclo periodico, il sistema non vi esce più. Questo ci rassicura sul fatto che le medie temporali fatte (per il calcolo del numero di siti vuoti, per il calcolo della velocità) hanno senso, e non ci si trova di fronte ad un processo instabile. Inoltre ci indicano che non si produce ulteriore informazione, e le simulazioni numeriche non necessitano di lunghi tempi d'esecuzione.

Le variazioni di  $S(0,t)$ , però, sono abbastanza grandi per una singola prova. Se andiamo a guardare ciò che ci interessa più direttamente (ovvero la media sulle condizioni iniziali) il quadro che otteniamo è più chiaro.

Dalla figura 2.5 si possono fare alcune osservazioni:

- la periodicità viene molto ridimensionata (come confermato dall'analisi di Fourier);
- viene messo in risalto il transiente iniziale, che rappresenta il tempo necessario al sistema per distribuire la popolazione sul toro;

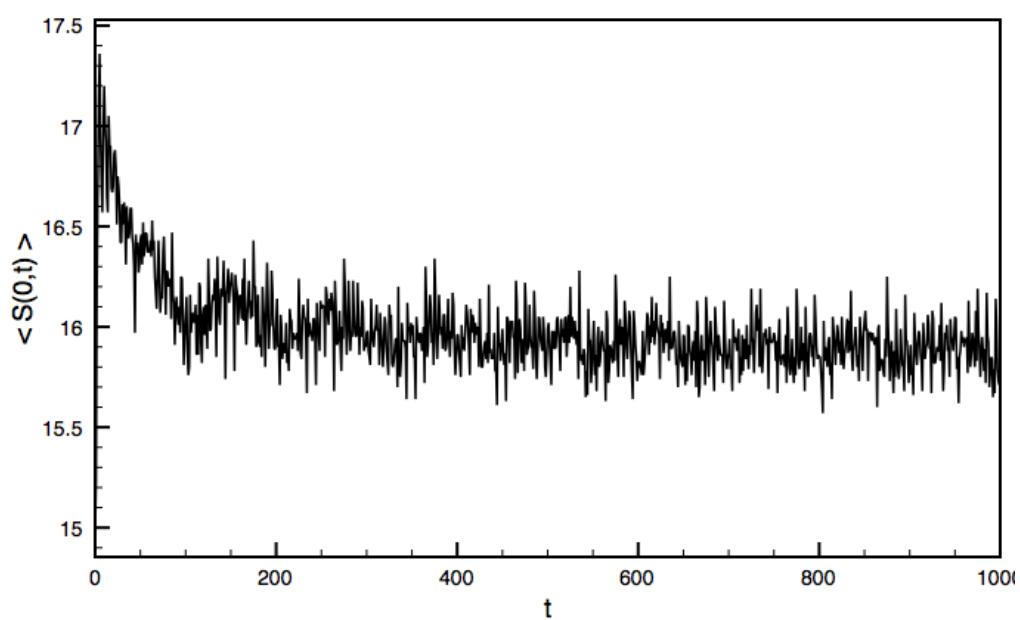


Figura 2.5: L’evoluzione temporale del numero di siti a coda nulla per  $N=20$ ,  $J=30$ ,  $c=10$ ,  $f=0.5$  mediato su 100 condizioni iniziali.

- le fluttuazioni sono molto ridotte e indicano il raggiungimento di uno stato di equilibrio ben definito dopo il transiente.

Un processo del genere fa sospettare una sorta di capacità diffusiva del sistema: data una condizione iniziale, il toro con la dinamica semaforica permette la ridistribuzione dei veicoli fra i semafori, in maniera più o meno efficiente in base ai parametri  $c$  ed  $f$ .

## 3.2 Diffusione

Per verificare il carattere diffusivo del processo, cambiamo il genere di condizione iniziale. Possiamo infatti verificare (cfr. fig. 2.6) che se distribuiamo tutti i veicoli su di un unico sito semaforico, otteniamo (in tempi relativamente brevi), la dispersione dei vari veicoli sul toro, in modo da perdere memoria della condizione iniziale, e non potervi più risalire.

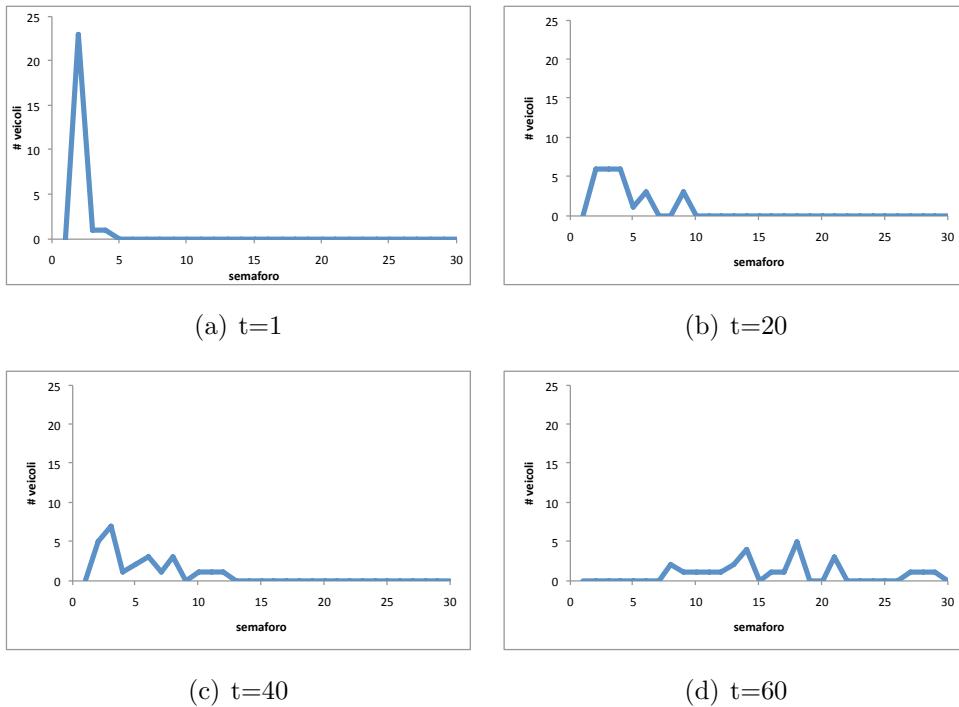


Figura 2.6: Evoluzione di una distribuzione di veicoli piccata. Si noti l'effetto di distribuzione dei veicoli.

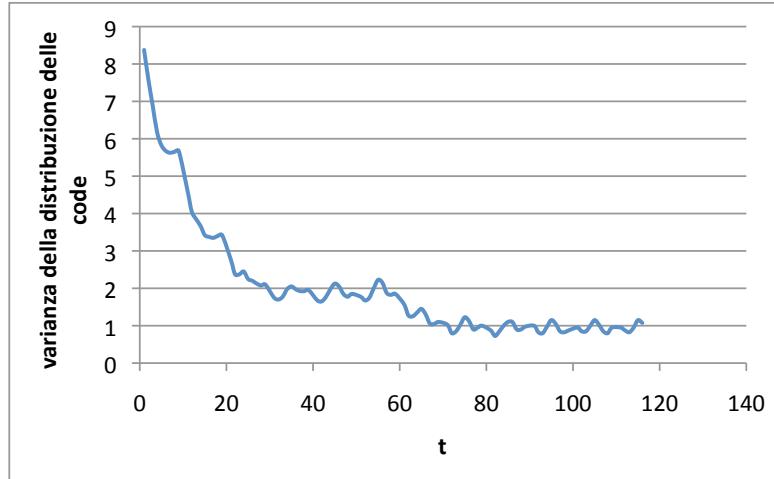


Figura 2.7: L’andamento nel tempo della varianza della distribuzione delle code partendo da una distribuzione piccata. Il tratto iniziale, in cui si ha la diffusione, ha un andamento rettilineo, come richiesto dalla diffusione.

Per spiegare questo comportamento, possiamo dare uno sguardo più approfondito all’eq. 2.9 nel caso di  $k = 0$ , che è quello che ci interessa.

$$P_j(0, t+1) = P_j(1, t)p_{j,j+1}(t)q_{j-1,j}(t) + P_j(0, t)(p_{j,j+1}(t)p_{j-1,j}(t) + q_{j,j+1}(t)q_{j-1,j}(t)) \quad (2.15)$$

Espandendo i termini, andando a sostituire le definizioni delle probabilità di transizione  $p$  e  $q$  e tenendo in conto il fatto che nel modello discreto considerato la matrice  $P_{kj}$  ovvero i vettori  $P_j(k, T)$  sono composti solo di 0 e di 1, si ottiene

$$\begin{aligned} P_j(0, t+1) &= P_j(0, t) - P_j(0, t)(1 - P_{j-1}(0, t))F_{j-1}(t) + P_j(1, t)F_j(t) \\ &\quad - P_j(1, t)(1 - P_{j-1}(0, t))F_j(t)F_{j-1}(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Possiamo pensare che se abbiamo un toro in cui ci sono ancora numerosi siti vuoti (basse densità, oppure distribuzioni piccate), i termini in  $P_j(1, t)$  sono in media poco importanti (o, più precisamente, esistono pochi  $j$  per i quali  $P_j(1, t) = 1$ , per la maggior parte dei  $j$  si ha  $P_j(1, t) = 0$ ).

La dinamica allora si semplifica drasticamente e si ha

$$P_j(0, t+1) = P_j(0, t) - P_j(0, t) (1 - P_{j-1}(0, t)) F_{j-1}(t) \quad (2.17)$$

Considerando questa espressione per la somma  $S(0, t) = \sum_{j=1}^J P_j(0, t)$  si ha

$$S(0, t+1) = S(0, t) - \sum_{j=1}^J P_j(0, t) (1 - P_{j-1}(0, t)) F_{j-1}(t) \quad (2.18)$$

Essa mostra il processo “diffusivo”: la presenza di siti vuoti viene decrementata in maniera sostanzialmente proporzionale al numero dei siti stessi. Le curve che ci attendiamo sono allora di tipo esponenziale, anche se i parametri caratteristici dipendono criticamente dalla dinamica microscopica.

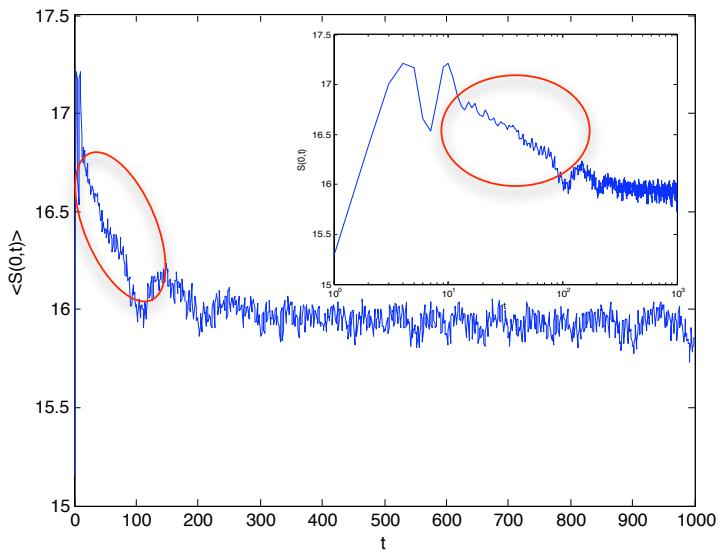


Figura 2.8: Andamento di  $\langle S(0, t) \rangle$  nel tempo, in un grafico e nella sua versione in scala logaritmica. Nelle aree cerchiate il decadimento esponenziale.

Questo processo diffusivo continua fino a quando i termini con  $P_j(1, t) = 1$  divengono numerosi, e lì si instaura una dinamica oscillante (debolmente periodica) che permette il mantenimento del numero pressoché costante di siti a coda nulla, come illustrato nella figura 2.5.

### 3.3 Configurazioni

Per giustificare i ragionamenti e i calcoli effettuati “in media” è necessario che il sistema sia capace di esplorare, con una certa distribuzione, tutto lo spazio degli stati a lui accessibile: se vi fossero delle scelte dei parametri che inibiscono o privilegiano una configurazione piuttosto che un’altra, questi ragionamenti non sarebbero validi.

Per verificare il comportamento del sistema da questo punto di vista, è necessario un parametro d’ordine che ci permetta in qualche modo di classificare gli stati del sistema. In base a quanto detto in precedenza, possiamo descrivere (parzialmente) la configurazione del sistema tramite una stringa di  $J$  valori numerici rappresentati le code. Ogni stringa, dunque, rappresenta uno stato della popolazione sul toro.

Un modo poco dettagliato ma efficace per descrivere ciascuno stato è quello di utilizzare la variabile  $S(0, t)$ , ossia etichettare ogni stato per il numero di siti a coda nulla presenti. In questo modo (evidentemente) non distinguiamo i siti per l’ordine in cui le code si presentano, né per il valore esatto di ciascuna coda, ma facciamo l’ipotesi implicita che (visto il processo diffusivo descritto), una volta raggiunto l’equilibrio attorno al valor medio di zeri, questo valore induca un set di configurazioni accessibili.

Possiamo allora considerare il numero complessivo delle configurazioni generiche visitate dal sistema al crescere della popolazione  $N$  del toro. Si vede che raggiunta la regione per la quale c’è circa un veicolo per semaforo ( $N \approx J$ ) si ha una rapida diminuzione deglle configurazioni possibili. Questa è un’ulteriore conferma della critica importanza che i siti vuoti hanno nella dinamica.

Mantenendo gli altri parametri fissati ed aumentando la frazione di verde, il sistema raggiunge in maniera molto più efficace il rilassamento all’equilibrio: quindi si riduce il numero di stati complessivi esplorati dal sistema, come si vede in figura 2.10.

In assoluto, però il numero di stati cui accede il sistema nella sua evoluzione è piuttosto limitato rispetto al numero possibile: attorno a qualche piccolo multiplo di  $N$  quando invece, per  $N$  veicoli su  $J$  siti, le possibili configurazioni sono in principio dell’ordine di  $N!$ . Ciò è indice del fatto che (data una condizione iniziale) il sistema evolve raggiungendo una set di condizioni

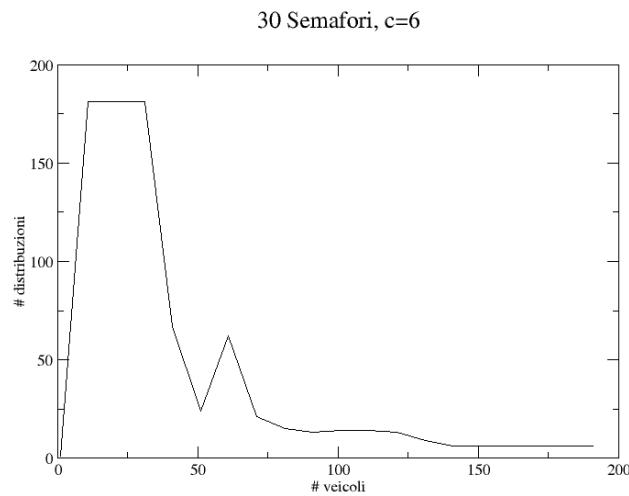


Figura 2.9: Andamento del numero di configurazioni raggiunte dal sistema al variare del numero di veicoli. La frazione di verde è pari a  $f=0.5$ .

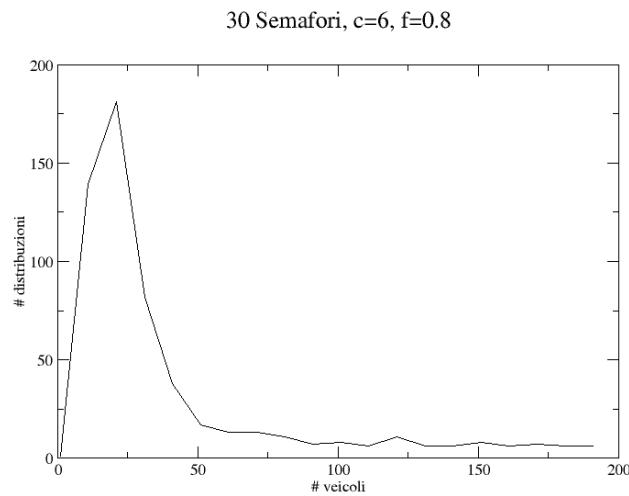


Figura 2.10: Andamento del numero di configurazioni raggiunte dal sistema al variare del numero di veicoli. La frazione di verde è pari a  $f=0.8$ .

stazionarie, dal quale non esce più: la dinamica ha in sostanza un punto fisso a cui tende, che è appunto quello raggiunto grazie alla diffusione di cui sopra e indotto dalla periodicità della dinamica dei semafori.

Questo vuol dire che data una condizione iniziale, il sistema raggiunge un certo punto fisso e non esplora tutto lo spazio delle configurazioni a lui accessibile. Risulta quindi essere questa la ragione profonda per cui è necessario fare medie su molte condizioni iniziali, definite dalla coppia

(sfasamenti fra i semafori, distribuzione dei veicoli)

Infatti, per quello che abbiamo detto, la singola evoluzione risulta non ergodica, e quindi non significativa dal punto di vista statistico. Per avere un sistema ergodico occorre considerare l'ensemble di tutte le realizzazioni possibili (o, nel nostro caso, un campione rappresentativo), componendo il quale si ricopre una buona fetta dello spazio delle configurazioni accessibile.

Potrebbe sorgere il dubbio che anche in questo modo (ossia scegliendo molte condizioni iniziali, ma tutte in maniera tale da distribuire a caso i veicoli sul toro) rimangano evoluzioni trascurate. In effetti le evoluzioni improbabili vengono a priori scartate in virtù del processo diffusivo che riconduce sempre il sistema, data qualunque condizione iniziale, al set periodico di stati che definisce l'equilibrio sul toro.

### 3.4 Distribuzione degli zeri

Per ottenere una descrizione efficace del nostro modello, bisogna cercare di rendere più predicable (o almeno dare una stima) il valore della probabilità di avere un sito a coda nulla  $p_0$ , dalla quale è possibile ottenere la velocità e la descrizione della transizione di fase.

Per fare ciò è interessante andare a guardare, innanzitutto, qual è, dato un campione di prove, la distribuzione sperimentale di questa quantità.

Chiamiamo tale distribuzione  $\gamma(p_0)$ . Chiaramente essa dipenderà dagli stessi parametri da cui dipende  $p_0$ , ossia la durata del ciclo di un semaforo  $c$ , e la frazione di verdi  $f$ .

### Dipendenza da $c$

Se facciamo molte evoluzioni e andiamo a guardare la distribuzione del numero medio di siti, otteniamo comportamenti molto differenti al variare del parametro  $c$  che definisce la durata dell'intero ciclo di un semaforo.

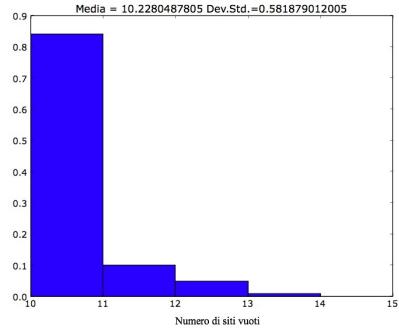
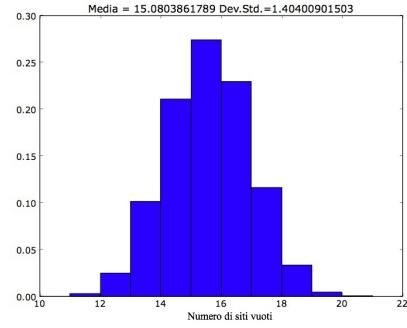
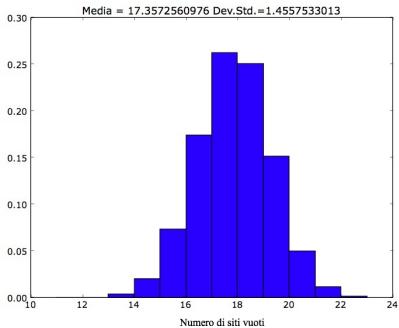
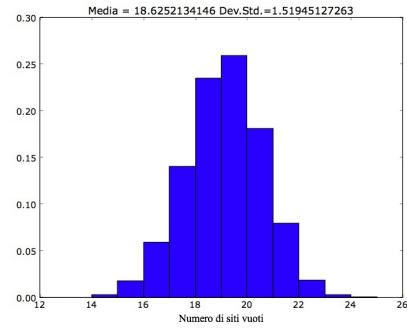
(a)  $c=3$ (b)  $c=9$ (c)  $c=15$ (d)  $c=21$ 

Figura 2.11: Dipendenza da  $c$  della distribuzione del numero di siti vuoti per un toro di 30 semafori con 20 veicoli.

Quello che osserviamo è che la forma della distribuzione (tranne nel caso limite  $c = 2$ ) è quella di una binomiale, associata in qualche modo ad un processo discreto in cui si ha una certa probabilità  $\lambda$  di avere un sito vuoto su  $J$  possibili scelte. Ovviamente,  $\lambda$  è direttamente legato a  $p_0$ , visto che appunto la media in una distribuzione binomiale è

$$\langle S(0, t) \rangle = \lambda J \quad (2.19)$$

e a sua volta (cfr. eq. 2.12)  $\langle S(0, t) \rangle = p_0 J$  e ovviamente allora  $\lambda = p_0$ .

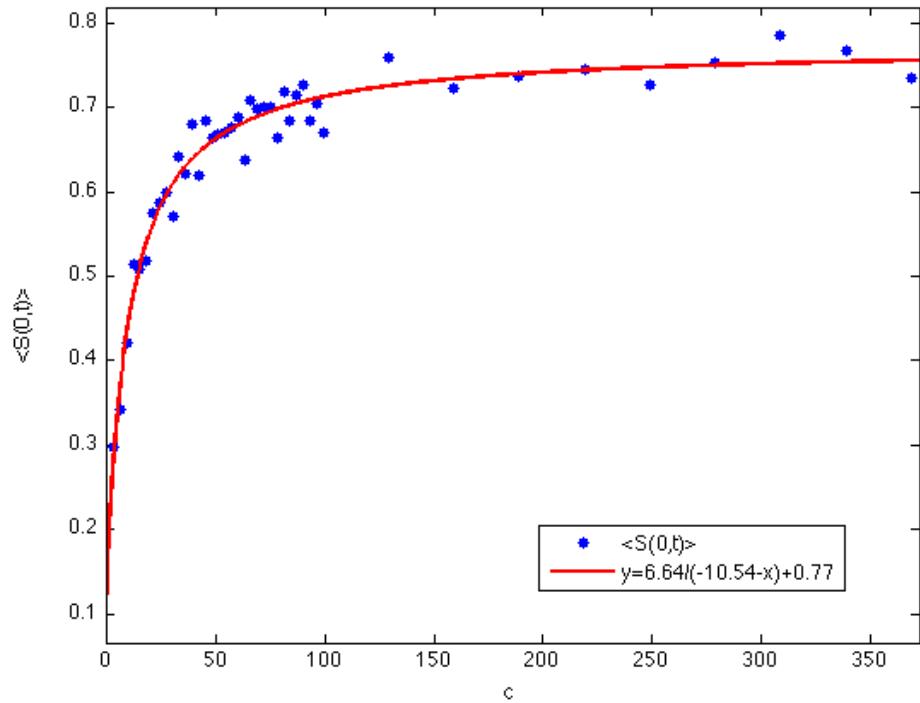


Figura 2.12: La crescita asintotica del numero medio di siti non occupati all'aumentare della durata del ciclo dei semafori  $c$ .

Se andiamo a considerare il valor medio di queste distribuzioni e ne guardiamo l'andamento in dipendenza da  $c$  otteniamo (cfr. fig. 2.12) un buon fit per un'espressione del tipo  $y(x) = \frac{a}{(b - x) + c}$ .

Il suo andamento asintotico è sensato, per il fatto che esiste un limite superiore al numero di siti che possono essere non riempiti (dato dal numero  $J$  di siti disponibili). Lo stesso andamento viene rilevato per la deviazione standard, lasciando dunque intendere che all'aumentare dei tempi del semaforo tutte le informazioni che estrapoliamo dalla medie (come la velocità) perdono via via di significato pratico ai fine di predire qualcosa della singola evoluzione, perché la distribuzione delle code diventa sempre più larga.

La dipendenza da  $c$ , risente in qualche modo dei limiti della simulazione: lunghi tempi del ciclo di un semaforo indeboliscono l'approssimazione di una stringa infinita tramite il toro, perché i tempi di attesa su un singolo sito divengono confrontabili coi tempi di percorrenza del toro, portando ad effetti di correlazione indesiderati, come code che si ricostruiscono sui medesimi siti.

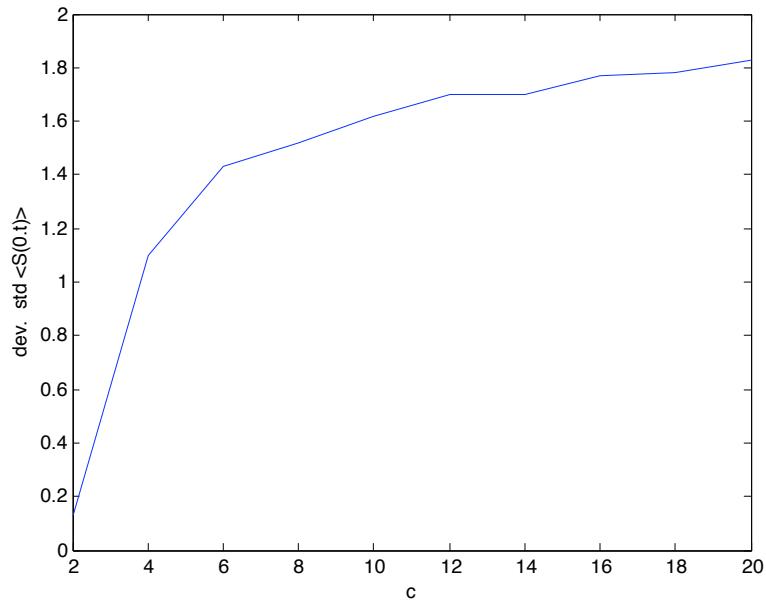


Figura 2.13: La crescita asintotica del deviazione standard del numero medio di siti non occupati all'aumentare della durata del ciclo dei semafori  $c$ .

### Dipendenza da $f$

Un'analisi del tutto similare si può fare variando il valore della frazione di verde  $f$ . In questo caso, le distribuzioni ottenute sono

Se guardiamo le medie, la variabilità risulta molto limitata, con un certo grado di simmetria (cfr. 2.15). A sua volta le deviazioni standard è abbastanza fissata (cfr. fig. 2.16), e tutto ciò porta a pensare che la dipendenza da  $f$  della distribuzione è abbastanza limitata.

Ciò ci conferma che il comportamento iniziale della curva della velocità è criticamente regolato dalla scala temporale  $c$  più che dalla percentuale di verdi. Questa seconda invece caratterizza completamente il regime congestionato, in cui i siti vuoti non sono più presenti.

### Invarianza di scala

Possiamo verificare se non vi siano effetti indotti dalle dimensioni del toro. Per fare questo, fissiamo il rapporto  $N/J$  e tutti gli altri parametri, ma accresciamo la lunghezza del toro. Otteniamo i risultati in figura 2.17

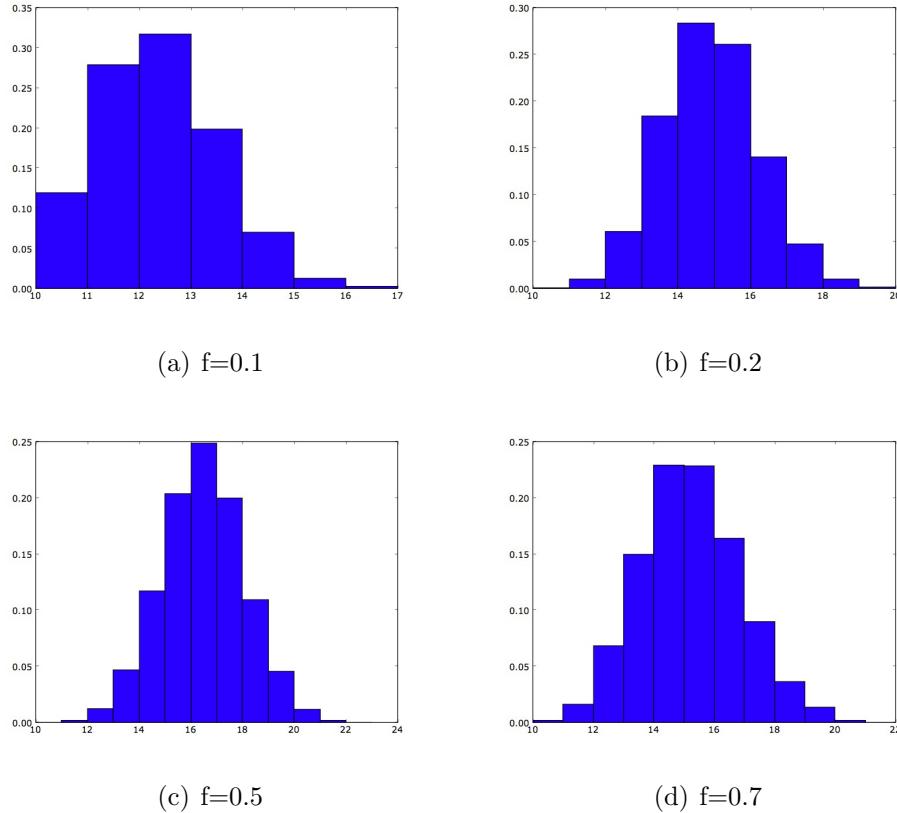


Figura 2.14: Dipendenza dal parametro  $f$  della distribuzione del numero di siti a coda nulla.

Essi ci mostrano che al raddoppiare, triplicare, etc. le dimensioni del toro, duplica, triplica, etc. il valore medio di siti a coda nulla: c'è dunque, come ci si poteva aspettare, invarianza di scala di questa proprietà, che si conferma dunque essere correlata alla densità di veicoli più che al loro numero assoluto. Evidentemente, all'aumentare delle dimensioni del toro, la distribuzione diviene più regolare a causa della migliore statistica.

### 3.5 Analisi dei flussi: diagramma fondamentale

I ragionamenti finora espressi possono essere riletta una volta riscalati ed espressi in termini dei flussi di veicoli che transitano sul toro. Se definiamo infatti come *flusso* il prodotto del numero di veicoli  $N$  per la velocità media

$$\Phi(N, f, c) = N \langle v \rangle \quad (2.20)$$

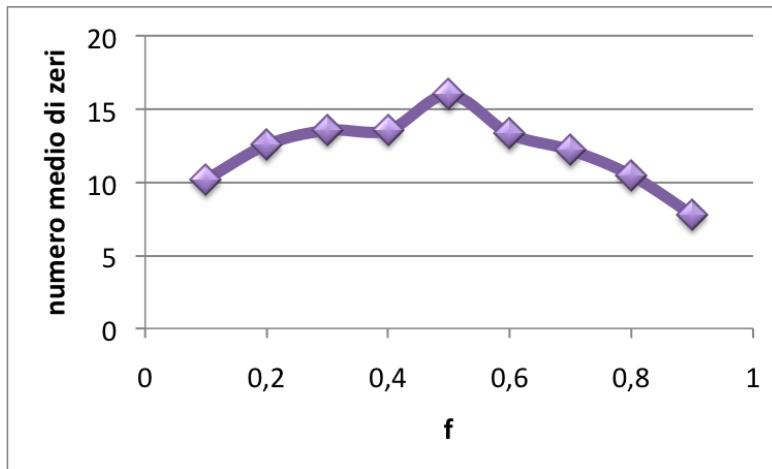


Figura 2.15: Andamento del numero medio di zeri al variare di  $f$ .

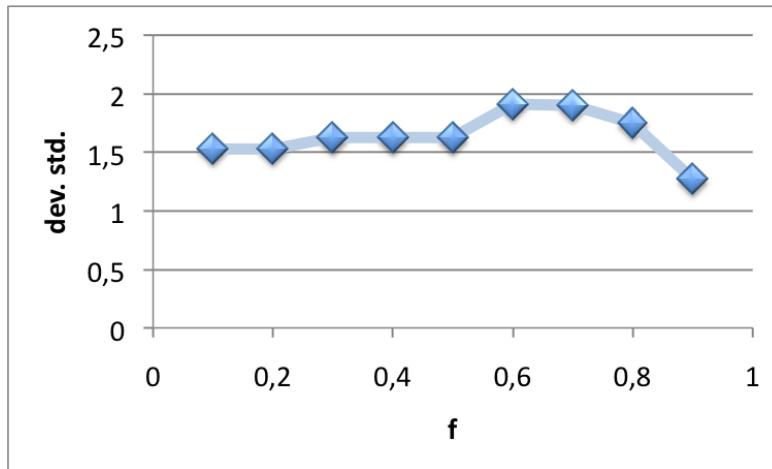


Figura 2.16: Andamento della deviazione standard sul numero medio di zeri al variare di  $f$ .

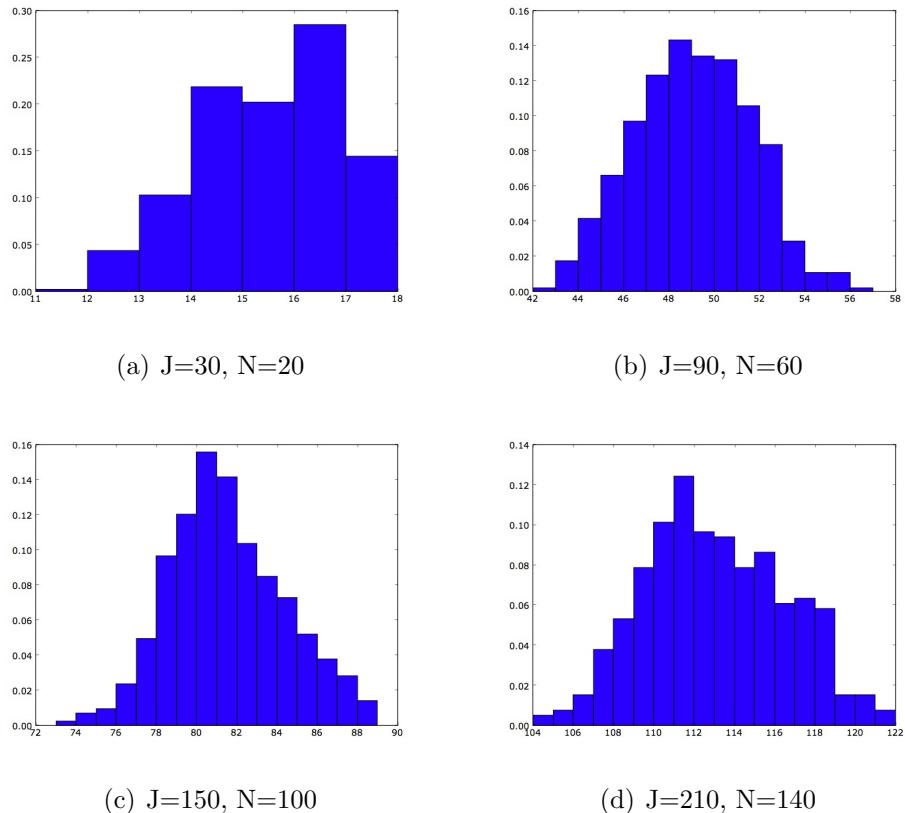


Figura 2.17: Andamento della distribuzione dei siti vuoti all'aumentare delle dimensioni del toro per  $c=10$  e  $f=0.5$ .

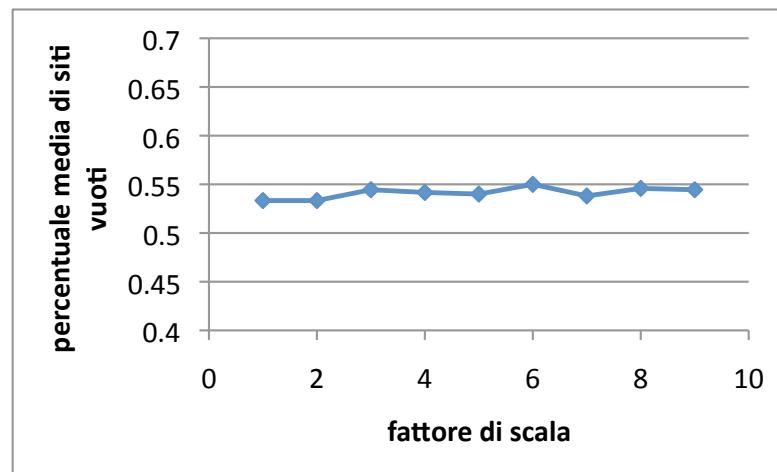


Figura 2.18: Al variare del fattore di scala varia il valor medio del numero di siti vuoti per gli istogrammi precedenti, ma il rapporto rimane fisso.

possiamo esprimere i risultati in maniera alternativa.

Se consideriamo il modello a code infinite, troviamo quanto illustrato in figura 2.20: il sistema ha un'iniziale crescita rettilinea del flusso (regime libero), poi (quando la densità diviene significativa, e quindi per  $N > J$ ) cominciano ad esser presenti gli effetti di congestione che riducono sempre più l'efficienza del sistema fino a che si raggiunge un flusso limite per il quale l'aumento di veicoli sul toro risulta indifferente.

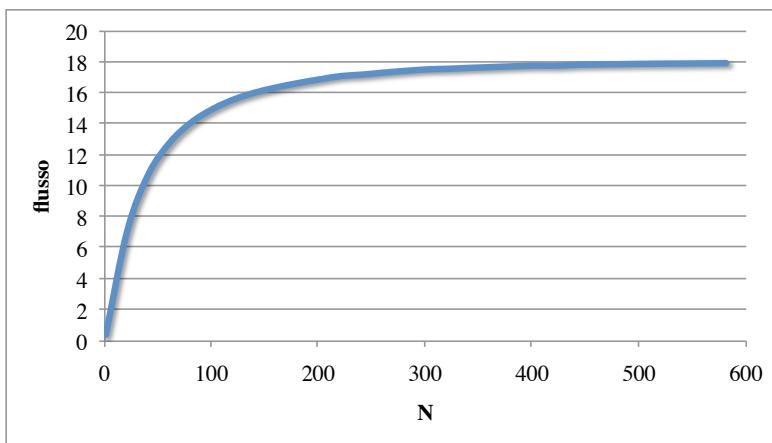


Figura 2.19: Andamento del flusso in funzione del numero di veicoli per un toro di 30 semafori, con  $c=10$  e  $f=0.5$ .

In questa rappresentazione, più delicata e interessante è la situazione del modello con code finite: la presenza dei tre regimi, illustrata in precedenza, si rivela in questo caso come la presenza di un regime a *flusso ottimale*, che viene mantenuto finché l'effetto delle code finite non rende inefficiente la dinamica.

Si può quindi parlare di un relativamente esteso regime stabile, in cui le fluttuazioni della popolazione non risultano importanti. In qualche modo, in piccolo, il modello unidimensionale ha qui realizzato il suo diagramma fondamentale (cfr. l'Introduzione). In effetti si evidenziano anche qui il regime libero e quello congestionato, con la differenza che i vincoli e la periodicità indotta dal modello 1d inducono un regime ampio in cui si mantiene un bilanciamento fra l'aumento di veicoli e la diminuzione della velocità, che risulta

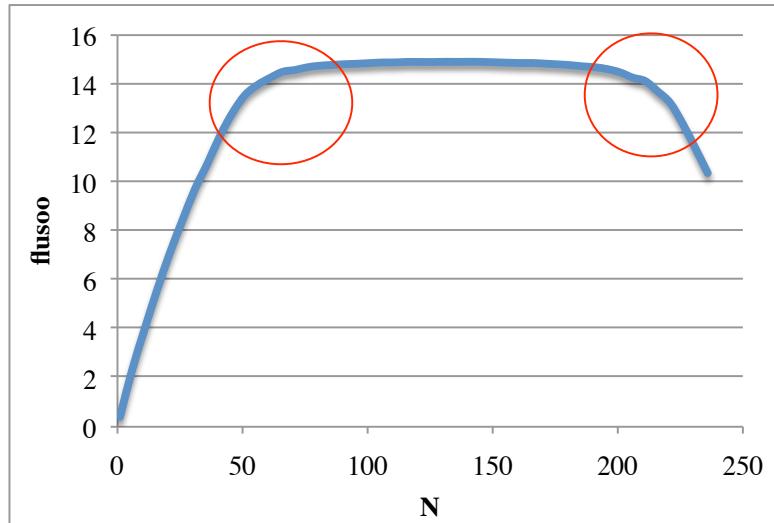


Figura 2.20: Andamento del flusso in funzione del numero di veicoli per un toro di 30 semafori, con  $c=10$  e  $f=0.5$ . e coda massima pari a 8 veicoli

quindi lineare nel numero di veicoli per un buon tratto. Solo il subentrare dell'effetto di volume finito riesce a far diminuire in maniera sufficientemente rapida la velocità per rompere l'equilibrio raggiunto al flusso massimo.

Infine, da notare la forte simmetria dell'immagine del flusso a code finite: essa rispecchia la simmetria del modello che abbiamo proposto per il caso del riempimento iniziale dei siti del toro e il caso del riempimento delle lacune delle code finite del toro (cfr. eq. 2.11).

## 4 In sintesi

Reimpostando il problema in nuovi termini abbiamo focalizzato il problema della transizione come un problema di accumulazione di veicoli nei siti semaforici. Diventa nodale quindi la variabile  $p_0$ , ossia la probabilità di prendere un semaforo a coda nulla data un certo set di parametri (densità, durata del rosso e del verde). Si può fare un'analisi delle proprietà statistiche di questa variabile, riscontrando che tutti i processi di media hanno senso su di un alto numero di realizzazioni con condizioni iniziali differenti perché una singola evoluzione non è ergodica; si riscontra che il processo, espresso in questi termini, risulta di tipo diffusivo, ossia capace di distribuire una colonna

su tutto il toro, facendo perdere memoria dello stato iniziale e raggiungendo un set di micro-stati di equilibrio. Infine, si può riesprimere la relazione del diagramma fondamentale per mettere in evidenza che, differentemente da quanto si ottiene in letteratura per reticolli bidimensionali, il modello a code finite presenta un'area di flusso massimo molto estesa, dovuta alla forte stabilità della correlazione fra i semafori.

# Capitolo 3

## Estensione bidimensionale

Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, il modello bidimensionale ha delle patologie non fisiche quali la forte correlazione, la periodicità e la non ergodicità. Inoltre, nel caso reale i modelli unidimensionali hanno per ovvie ragione poca applicabilità. Da qui viene l'estensione bidimensionale seguente in cui viene fatto uso di alcuni di alcuni dei risultati prodotti nel caso 1d.

### 1 Modello 2d

E' possibile estendere il modello unidimensionale ad una rete uniforme (tipo Manhattan) e costruire un sistema equivalente che ripropone il modello di transizioni di fase già discusso finora.

Il modo più semplice di estendere su una seconda dimensione i risultati già ottenuti sta nel costruire una dinamica random su reticolo.

#### 1.1 Dinamica sul reticolo

Possiamo costruire una dinamica bidimensionale elementare ereditando le assunzioni fatte per il caso unidimensionale ed aggiungendo poco di più. Nello specifico, stabiliamo che:

- la rete bidimensionale è anch'essa toroidale (condizioni al contorno periodiche);

- i veicoli vengono ancora distribuiti casualmente sul toro 2d;
- i veicoli scelgono in maniera equiprobabile il semaforo di destinazione fra i tre possibili (viene inibita la possibilità di tornare sul proprio cammino, cfr. fig. 3.1). Se il semaforo scelto ha coda più lunga del massimo consentito ( $M$ ) il veicolo non si muove fino allo step temporale successivo. Blocca in questo modo la sua coda fintantoché non trova modo di muoversi.

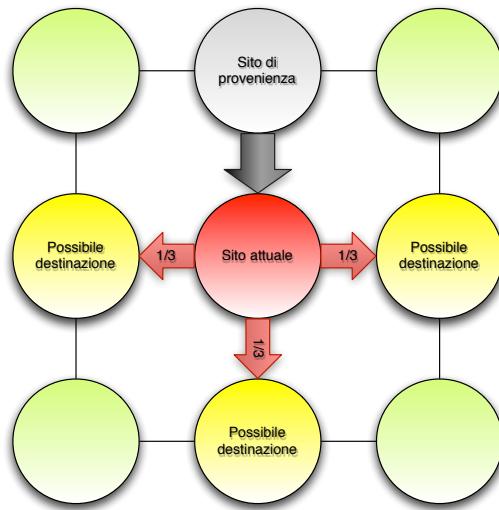


Figura 3.1: Un veicolo si muove sulla rete: ad ogni step può scegliere solo tre semafori fra i quattro connessi, perché non può tornare indietro. Ogni semaforo ha quindi probabilità di essere scelto pari a 1/3.

Con queste semplici aggiunte, la dinamica dei veicoli può venire implementata su di una rete  $L \times L$  e di nuovo si può valutare l'andamento della velocità media su molte prove in funzione della densità di veicoli.

## 2 Bidimensionale ed unidimensionale a confronto

La simulazione nel caso bidimensionale produce curve della velocità media particolarmente regolari, più regolari di quanto ottenuto nel caso unidimensionale. Ma i diversi regimi attesi (flusso libero, transizione del secondo

ordine, regime congestionato) vengono riprodotti, con una dinamica del tutto simile a quanto ottenuto nel caso unidimensionale (cfr. fig. 3.2).

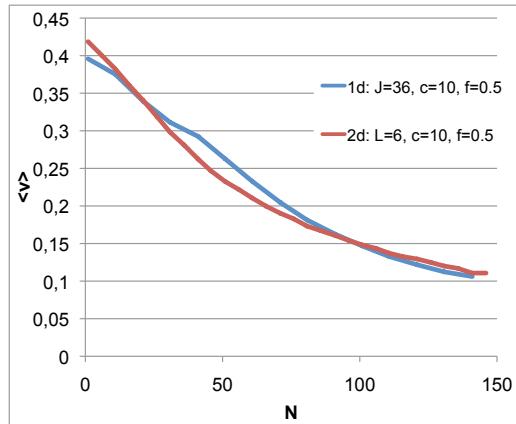


Figura 3.2: L’andamento della velocità a confronto fra il caso 2d e quello 1d: nel primo caso il toro 2d è composto da  $L \times L = 36$  siti mentre nel secondo l’intera stringa unidimensionale è composta da  $J = 36$  semafori.

Anche nel caso bidimensionale si ha una dipendenza (per piccoli valori di densità) dal parametro  $c$  (cfr. nel caso 1d la figura 1.5), ed anche in questo caso tale dipendenza si perde oltrepassata la regione per cui  $\frac{N}{L^2} \approx 1$ .

Questo ci consente di interpretare il moto bidimensionale come una realizzazione di tanti moti unidimensionali: ogni veicolo, infatti, tramite il processo di scelta casuale costruisce un proprio percorso, una propria successione di semafori attraversati; ma essendo i nostri semafori tutti equivalenti fra di loro, anche questi percorsi risultano esserlo mediando su numerose realizzazioni, per cui i vari cammini svolti dagli  $N$  veicoli in una singola evoluzione non sono altro che  $N$  realizzazioni di un cammino unidimensionale,

## 2.1 Aperiodicità

Un’importante differenza con il modello unidimensionale sussistente nel caso 2d sta nella sua aperiodicità. Si ricorderà, infatti, come nel capitolo 2 si sia parlato dell’andamento periodico degli stati attraversati dal sistema durante una singola evoluzione (cfr. fig. 2.4): in tal caso si era conteggiato il numero di siti con coda nulla  $S$  e la sua evoluzione nel tempo. Se facciamo la

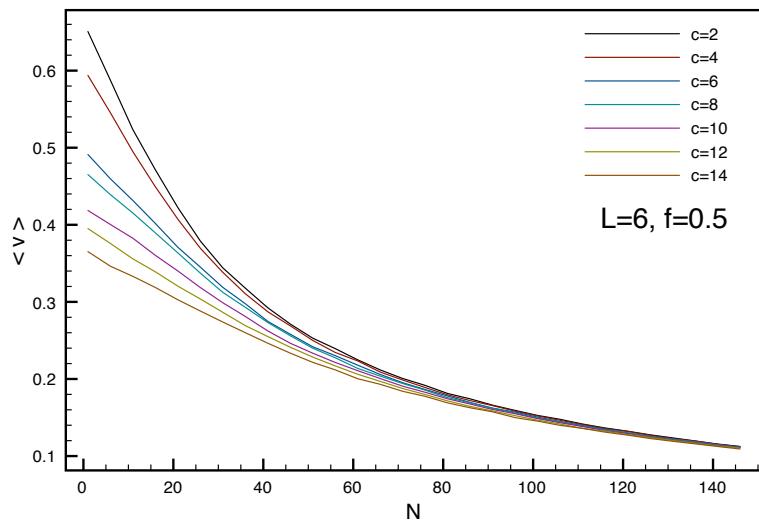


Figura 3.3: Andamento sul network bidimensionale della velocità media dei veicoli al variare del ciclo dei semafori  $c$  per  $L=6$  e  $f=0.5$ . Come si vede, differentemente dal caso unidimensionale, il tratto iniziale fortemente caratterizzato dalla dipendenza da  $c$  è più regolare, non c'è cambiamento di concavità; si raggiunge comunque una condizione di congestione che abbassa gradualmente la velocità media.

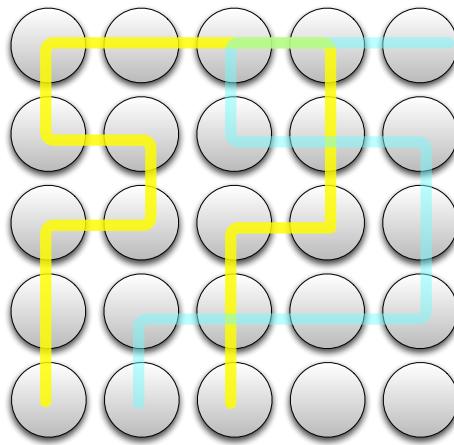


Figura 3.4: Rappresentazione di due cammini unidimensionali su di un reticolo 2d.

stessa misura nel caso 2d, otteniamo un andamento molto più “realistico”: le correlazioni fra i semafori sono assenti ed una singola evoluzione risulta completamente aperiodica, come confermato dall’analisi di Fourier.

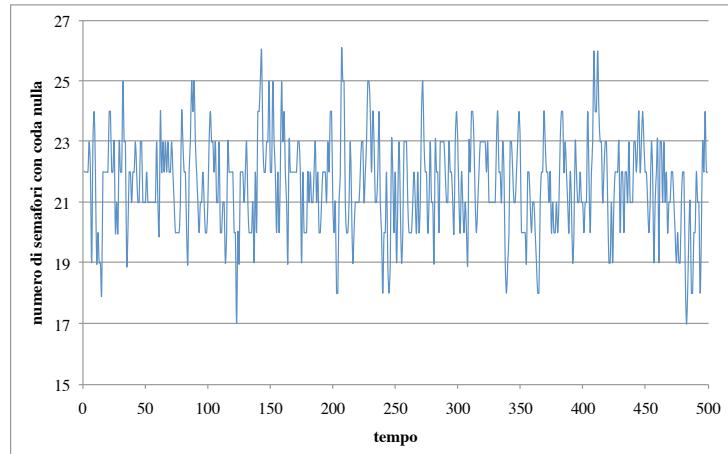


Figura 3.5: Numero di semafori con coda nulla sul reticolo unidimensionale di  $L=6$ ,  $N=20$ ,  $c=10$ ,  $f=0.5$  per una singola evoluzione.

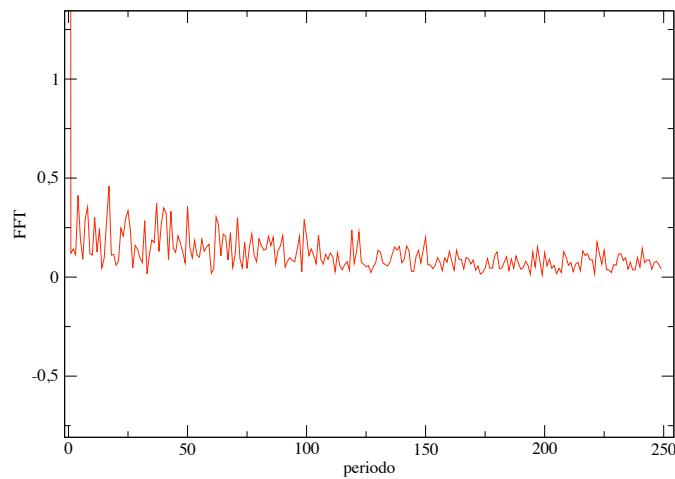


Figura 3.6: Discrete Fourier Transform del segnale in figura 3.5.

Questa differenza fondamentale è facilmente giustificabile: la scelta random del cammino costruito sul network 2d, permette di perdere rapidamente memoria di qualunque condizione iniziale anche in una singola evoluzione,

quando invece, nel caso unidimensionale, il vincolo dell'unica colonna di veicoli che si muove su di una dinamica intrinsecamente periodica è ineludibile: nel caso 2d, in sostanza, si “mescolano” vari modelli 1d, portando già ad un effetto di media.

### 3 Diagramma fondamentale

Se andiamo a guardare il modello bidimensionale a code finite, possiamo andare a ricostruire il diagramma fondamentale che mette in relazione flusso dei veicoli (numero di veicoli  $\times$  velocità media) e densità (in questo caso, direttamente numero di veicoli visto che fissato il numero di veicoli anche la densità media è fissata).

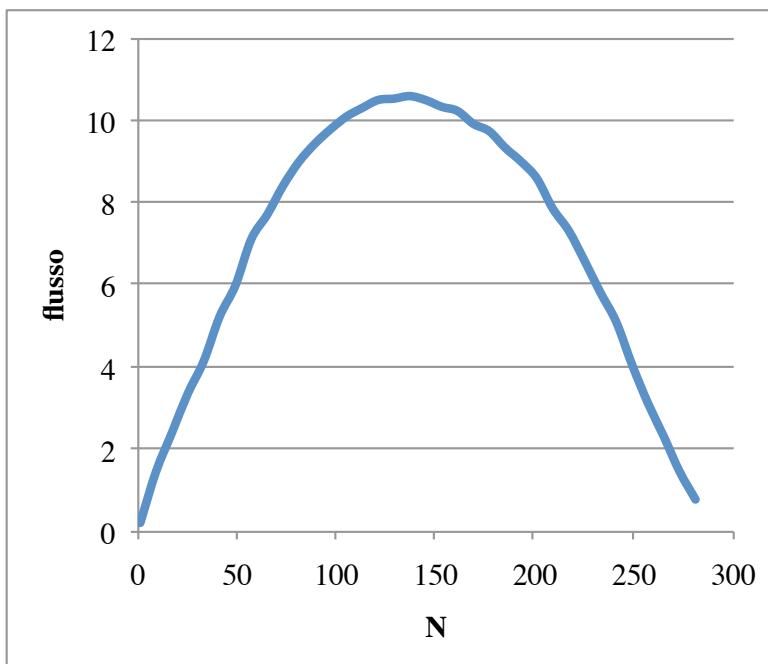


Figura 3.7: Relazione flusso/numero di veicoli (diagramma fondamentale) per un reticolo di  $6 \times 6$  semafori, con  $f=0.5$ ,  $c=10$  e coda massima  $c_{\max}=8$ .

Il massimo del flusso corrisponde al valore di densità per il quale ogni semaforo è mediamente riempito (nella figura 3.8, essendo la coda massima pari a 8, si ha  $\frac{8}{2} \times 36 = 144$ ).

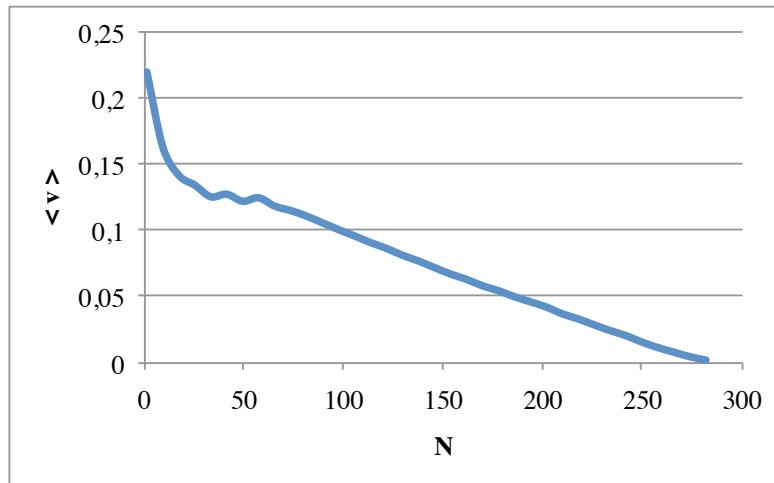


Figura 3.8: Relazione velocità/numero di veicoli (diagramma fondamentale) per un reticolo di  $6 \times 6$  semafori, con  $f=0.5$ ,  $c=10$  e coda massima  $c_{max}=8$ . Come si vede dopo il primo regime l'andamento diviene rettilineo ( $\propto N$ ) per cui, nel calcolo del flusso, si ha una figura parabolica.

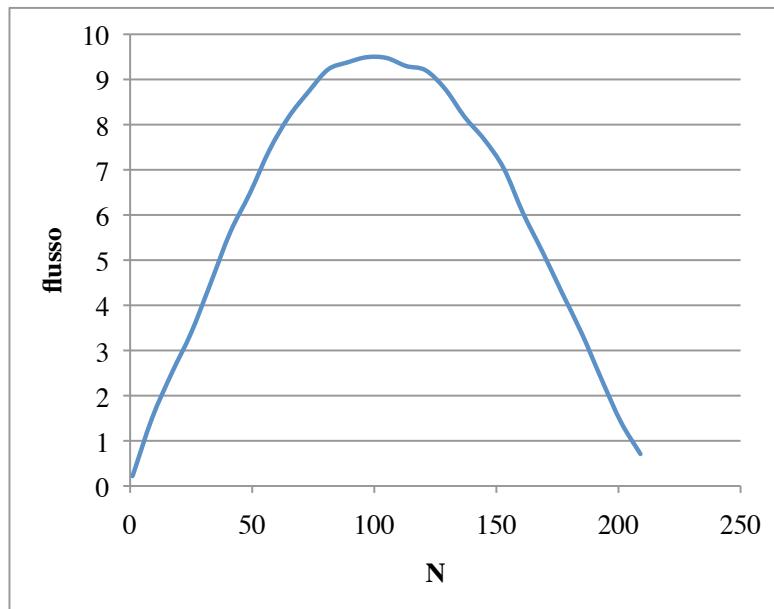


Figura 3.9: Relazione flusso/numero di veicoli (diagramma fondamentale) per un reticolo di  $6 \times 6$  semafori, con  $f=0.5$ ,  $c=10$  e coda massima  $c_{max}=6$ . Notare che il massimo è a  $N = \frac{6}{2} \times 36 = 108$ .

## 4 Sviluppo della congestione

Se consideriamo il modello bidimensionale a code finite, esso presenta un ulteriore aspetto interessante: la dinamica di sviluppo della congestione su di una singola evoluzione.

Per tale studio si sono fatte alcune simulazioni, che portano all'evidenza il fatto che il raggiungimento della congestione avviene in base ad una vera e propria “propagazione” grazie a un fenomeno cooperativo fra i semafori che porta al formarsi di pattern omogenei di code massime.

La simulazione (cfr. fig. 3.10) consiste, nel dettaglio, nel distribuire uniformemente un plateau di veicoli in modo da dare ad ogni semaforo  $M - 1$  veicoli in coda (in cui  $M$  è la coda massima). Se poi si distribuiscono casualmente un certo numero di veicoli (più o meno grande) su tale plateau si può lasciare evolvere il sistema e verificare il raggiungimento di una situazione bloccata.

Se andiamo a guardare l'evoluzione temporale (cfr. fig. 3.11), possiamo osservare che l'effetto cooperativo fra veicoli permette una crescita rapida del numero di siti a coda massima, fino a d una saturazione che ottimizza il numero di siti a coda nulla.

Se variamo il valore della frazione di verdi  $f$  (cfr. fig. 3.11, 3.12, 3.13) vediamo che la saturazione viene inevitabilmente raggiunta, ma con tempi diversi a causa della maggiore o minore efficienza dei semafori.

## 5 In sintesi

Abbiamo esteso il modello unidimensionale al caso bidimensionale costruendo un reticolo regolare su cui replicare una dinamica analoga a quanto discusso in precedenza. SI è ottenuto un modello che, a differenza dell'1d, non è periodico e per il quale già una sola evoluzione è significativa statisticamente. Questo perché, ad un'analisi dettagliata, il modello bidimensionale risulta essere un intreccio di cammini unidimensionali in cui la possibilità di scelta di cammino casuale rende le transizioni più *smooth*. Anche in questo caso siamo riusciti a produrre il diagramma fondamentale, riscontrando (in un modello così essenziale) la forte analogia con quanto ottenuto in lettera-

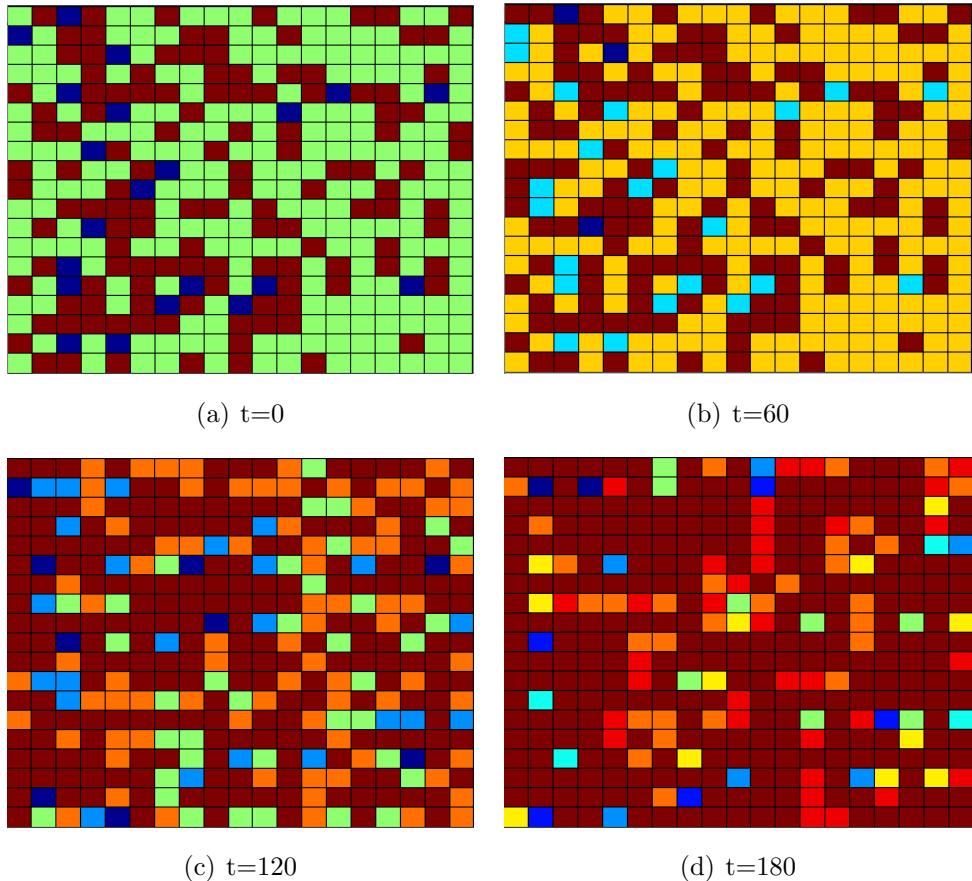


Figura 3.10: L’evoluzione di un un reticolo  $20 \times 20$  con plateau di 7 veicoli ( $M=8$ ) e con il 35% (140 in totale) dei semafori che hanno la coda massima all’inizio dell’evoluzione. I colori più caldi indicano code più lunghe.

tura (cfr. [1] [3]): si perde la vasta regione di flusso massimo ottenuta per  $s$  (frutto dei forti vincoli cui le basse dimensioni forzano) e si ottiene un massimo di flusso quando la densità raggiunge il suo valore medio. Tale modello bidimensionale si è prestato anche all’osservazione del raggiungimento della congestione da parte del sistema, evidenziando la dinamica cooperativo (sincronia) che viene ad instaurarsi una volta che si superi la densità critica. La variazione dei parametri dinamici (durata del verde e del rosso) comporta solo un più lento o più veloce raggiungimento della congestione.

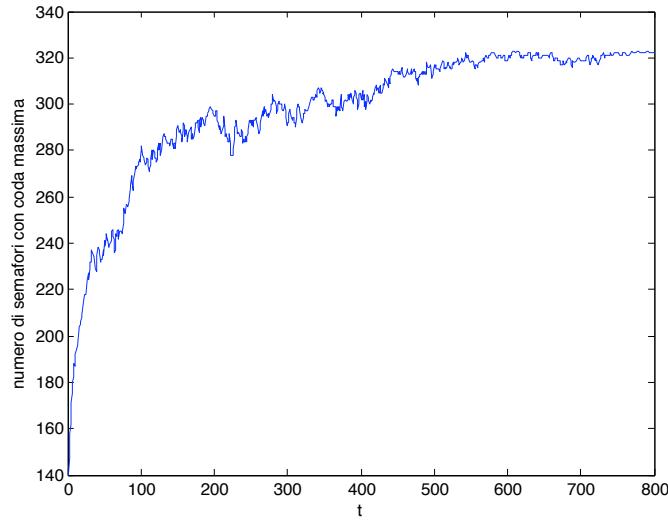


Figura 3.11: Crescita del numero di siti con coda massima per l’evoluzione di  $20 \times 20$  semafori con plateau di 7 veicoli ( $M=8$ ) e con il 35% (140 in totale) dei semafori con coda massima. I parametri della dinamica sono  $c=10$  e  $f=0.5$ .

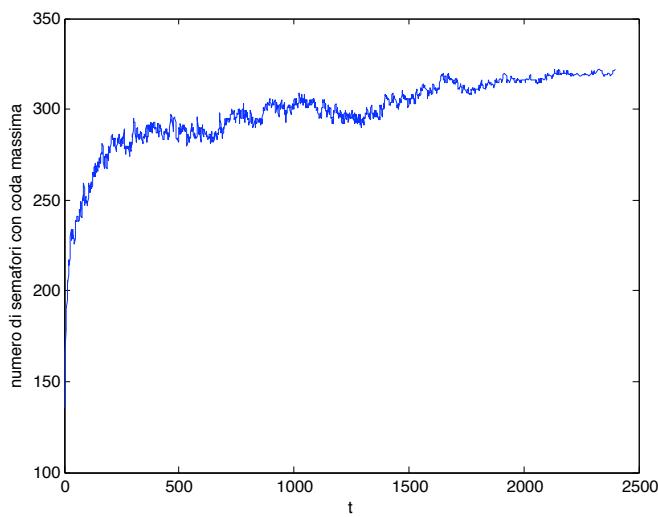


Figura 3.12: Crescita del numero di siti con coda massima per l’evoluzione di  $20 \times 20$  semafori con plateau di 7 veicoli ( $M=8$ ) e con il 35% (140 in totale) dei semafori con coda massima. I parametri della dinamica sono  $c=10$  e  $f=0.2$ .

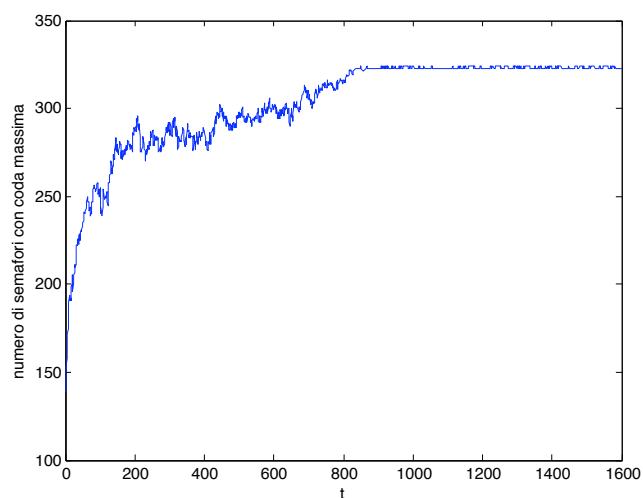


Figura 3.13: Crescita del numero di siti con coda massima per l'evoluzione di  $20 \times 20$  semafori con plateau di 7 veicoli ( $M=8$ ) e con il 35% (140 in totale) dei semafori con coda massima. I parametri della dinamica sono  $c=10$  e  $f=0.8$ .



# Capitolo 4

## Modello markoviano

I modelli considerati, le loro analisi e i risultati ottenuti nei precedenti capitoli possono essere ripresi ulteriormente ed affrontati da un punto di vista più astratto, costruendo un modello di base che metta in luce le caratteristiche salienti e gli aspetti sostanziali nascosti nelle dinamiche finora trattate. A questo scopo, vengono in questo capitolo ripresi alcuni concetti elementari della teoria delle catene di Markov e dei processi markoviani.

### 1 Ragioni per il modello markoviano

Come descritto in [1], l'esistenza di un diagramma fondamentale macroscopico che metta in relazione la densità di veicoli (più propriamente, l'accumulazione) e il flusso in uscita di veicoli implica che se le condizioni al contorno su di un network dato variano lentamente nel tempo (e nel caso del toro sono invarianti), si può fare un modello del network considerandolo come se fosse complessivamente un grande serbatoio con un flusso in ingresso ed uno in uscita. Nel nostro modello, vista la chiusura del toro, possiamo vedere il processo dal punto di vista di un unico semaforo che interagisce col serbatoio scambiando con esso i due flussi. Ad ogni passo temporale, il semaforo può compiere una transizione da uno stato più popolato ad uno meno popolato, col vincolo (espresso dal nostro modello) che lo scarto fra uno stato e il successivo è al massimo unitario (i veicoli, come si ricorderà, si

muovono uno per volta). Questo approccio ci permette di focalizzarci sul singolo semaforo come sistema da studiare e considerare il resto della dinamica come un “ambiente” col quale il nostro sistema si regola per mantenere un certo equilibrio, senza il quale il nostro modello toroidale ovviamente perdebbe di senso (ci sarebbe, in altre parole, un semaforo particolare capace di bloccare il flusso e spezzare il toro, cosa che non avviene e non può avvenire per le caratteristiche diffuse del modello). La transizione ad uno step che

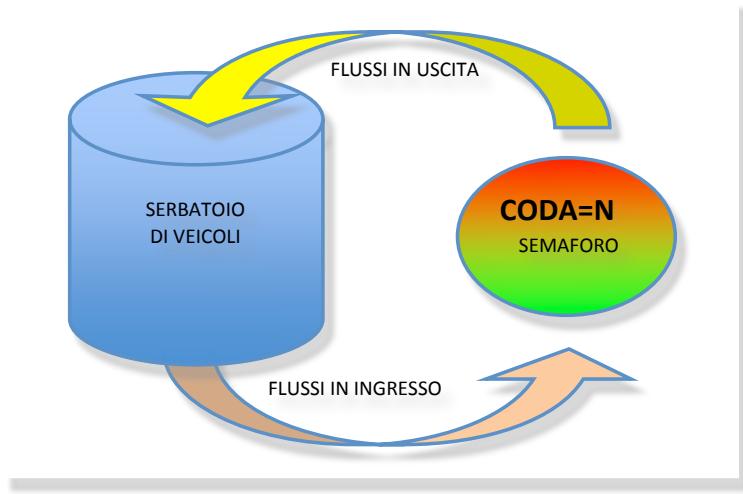


Figura 4.1: Possiamo rivedere il nostro modello di dinamica sul toro come la dinamica di un singolo semaforo che interagisce con un serbatoio: con una certa distribuzione di probabilità si hanno i flussi in ingresso e il semaforo risponde con una certa regolarità immettendo veicoli nel serbatoio. In condizioni di equilibrio i due flussi sono uguali in media.

profiliamo in questo modo ben si adatta ad una descrizione che faccia uso della teoria dei processi markoviani. Il confine però in cui va inscritto un tale approccio è quello dei processi stocastici, e ciò vuol dire che se vogliamo descrivere i nostri modelli tramite una catena di Markov, essi non devono possedere forti correlazioni od essere in qualche modo periodici. E' evidente dunque che un tale approccio non potrà spiegarci la dinamica dettagliata del modello unidimensionale (una singola evoluzione, come abbiamo visto, è periodica) ma piuttosto può darci informazioni sul processo medio: in fonde,

è di quel processo frutto della media su molte realizzazione che noi andiamo a calcolare gli osservabili, ed è l'unico di nostro interesse. Per il caso bidimensionale l'estensione è più semplice perché anche la singola evoluzione è non periodica.

L'idea è dunque che esista una distribuzione di probabilità per flussi in ingresso sul singolo semaforo che influenza il comportamento di un processo markoviano definendone la matrice di transizione.

Di seguito vengono introdotti un po' più dettagliatamente i concetti fondamentali per la trattazione con le catene di Markov.

## 2 Breve introduzione alle catene di Markov

### 2.1 Definizione di catena di Markov

Consideriamo, in astratto, che un certo sistema abbia accesso, lungo la sua evoluzione, ad un certo insieme finito di stati  $S = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_k\}$ . Supponiamo che tale sistema si muova da uno stato all'altro tramite un processo stocastico  $\{X_n\}$ , e chiamiamo ogni transizione *passo*. Se il processo si trova, diciamo, nello stato  $s_i$  ad un certo istante  $i$  della sua storia, possiamo domandarci con quale probabilità esso può raggiungere lo stato  $j$  allo step successivo.

Definiamo quindi come *probabilità di transizione* la probabilità condizionata

$$p_{ij}(n) := \Pr\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_i\} \quad (4.1)$$

Diciamo che un processo ha la *proprietà di Markov* se

$$\Pr\{X_n = i | X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\} = \Pr\{X_n = i | X_{n-1}\} \quad (4.2)$$

che vuol dire che la probabilità di transire da uno stato al successivo non dipende dall'intera storia del sistema ma solo dall'ultimo passo compiuto.

Possiamo allora definire la catena di Markov finita come un processo stocastico su di un numero finito di stati che gode della proprietà di Markov e in cui le probabilità di transizione non dipendono dallo step al quale il sistema si trova. In tal caso, possiamo costruire una matrice  $P_n := (p_{ij}()) = (p_{ij}) := P$  che chiameremo *matrice di transizione*.

In sintesi, si può dire che una catena di Markov è fatta in modo tale che se si conosce la distribuzione di probabilità del processo al tempo presente, allora si può conoscere la distribuzione di probabilità nel futuro e tutto il passato non ha alcun effetto su di esso.

## 2.2 Proprietà della matrice di transizione

Per la matrice di transizione vale la proprietà data dalla seguente equazione (detta di Chapman - Kolmogorov):

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^r P_{kj}^{n-r} \quad (4.3)$$

in cui, ovviamente,  $P_{ij}^n$  è la probabilità di andare in  $n$  step dallo stato  $s_i$  allo stato  $s_j$ , e in cui  $r$  è un qualsiasi naturale  $r < n$ .

Si può fare uso di questa proprietà per dimostrare che per determinare l'evoluzione di una catena di Markov è sufficiente avere ben definita la matrice di transizione  $P$  e calcolarne le potenze. Infatti, si può dimostrare che, preso un vettore  $u_0$  che individui la distribuzione iniziale di probabilità, la probabilità che il sistema si trovi nello stato  $s_i$  dopo  $n$  step è pari a

$$u_n = u_0 P^n \quad (4.4)$$

### Classificazione degli stati

E' possibile dare alcune definizioni per l'insieme degli stati cui ha accesso il sistema:

- *stati raggiungibili* : presi due stati  $s_i$  ed  $s_j$ ,  $s_j$  è raggiungibile da  $s_i$  se è possibile in un qualsiasi numero finito di passi andare da  $s_i$  a  $s_j$ , ossia, per un certo  $n$ ,  $P_{ij}^n > 0$ ;
- *stati comunicanti* : presi due stati  $s_i$  ed  $s_j$ , essi comunicano se sono vicendevolmente raggiungibili (la comunicazione è una relazione di equivalenza sull'insieme degli stati del processo);
- *stati transitori* : presi due stati  $s_i$  ed  $s_j$ , se  $s_j$  è raggiungibile da  $s_i$  ma non viceversa si dice che  $s_i$  è transitorio;

- *stati ergodici* : gli stati non transitori sono detti ergodici. Ogni catena di Markov ha almeno uno stato ergodico;
- *stati assorbenti* : sono stati dal quale il sistema non può allontanarsi, e per i quali, di conseguenza, la probabilità di transizione è 1, ossia, se  $k$  è uno stato transitorio,  $p_{kk} = 1$ . Ovviamente uno stato assorbente è ergodico.

### Classificazione delle matrici di transizione

Avendo ben classificato gli stati del processo, possiamo classificare a loro volta le catene di Markov tramite le loro matrici:

- *catene irriducibili* : una catena è irriducibile se esiste un solo insieme di stati comunicanti fra loro (una *classe*), ossia se tutti gli stati comunicano fra loro;
- *catene regolari* : una catena è regolare se esiste una potenza della matrice di transizione che contiene solo elementi strettamente positivi, il che vuol dire che se  $n$  è il valore per il quale  $P$  è regolare, allora è possibile raggiungere qualsiasi stato in esattamente  $n$  passi;
- *catene assorbenti* : sono dette assorbenti quelle catene i cui stati ergodici sono tutti assorbenti.
- *catene ergodiche* : una catena è ergodica se è possibile andare da ogni stato ad ogni altro, anche in più passi. Le catene regolari sono ergodiche ma non viceversa, ad esempio

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è ergodica (in al massimo 2 step tutti gli stati sono raggiungibili) ma non regolare (non esiste alcuna potenza  $n$  per cui  $P^n$  non abbia elementi nulli).

### 2.3 Stato stazionario per matrici regolari

Consideriamo ora qualche proprietà delle matrici regolari, che saranno poi usate nel seguito della discussione.

### Matrice limite

Se  $P$  è una matrice di transizione per una matrice di Markov regolare, si ha che per  $n$  tendente all'infinito  $P^n$  tende ad una matrice limite con tutte le righe uguali ad uno stesso vettore riga  $v$  strettamente positivo.

### Vettore fisso

Un vettore riga fisso per la matrice di transizione è un vettore che soddisfa la relazione

$$vP = v \quad (4.5)$$

tale vettore può essere individuato risolvendo il sistema

$$\begin{cases} vT = v \\ \sum_i v_i = 1 \end{cases}$$

Infine, si può dimostrare che preso qualsiasi vettore riga iniziale  $u$ , se  $P$  è la matrice di transizione di una catena di Markov regolare, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} uP^n = v \quad (4.6)$$

dove  $v$  è il vettore fisso (stato stazionario) di  $P$ .

## 2.4 Catene di Markov reversibili

Se si prende una catena di Markov che abbia stato stazionario con probabilità di transizione  $P_{ij}$  e il vettore fisso  $v$ , si dice che la catena è *reversibile temporalmente* se vale la relazione

$$v_i P_{ij} = v_j P_{ji} \quad (4.7)$$

che vuol dire che, per tutti gli stati  $i$  e  $j$ , il tasso al quale il processo passa da  $i$  a  $j$  è identico a quello del passaggio da  $j$  a  $i$ .

### 3 Modello markoviano per la dinamica su toro

Ritorniamo ora direttamente al problema del toro di semafori, e proviamo a riscriverlo con la terminologia della catena di Markov. Per far ciò, occorre uno step intermedio che consiste in un’ulteriore semplificazione della dinamica, come riportato nel paragrafo seguente.

#### 3.1 Equazione dinamica

Possiamo semplificare il nostro processo portandolo all’essenziale: se lo guardiamo microscopicamente si tratta di un semaforo che riceve, o meno, un certo flusso in ingresso e che a sua volta rilascia, con una certa regolarità, un dato flusso in uscita. Se consideriamo come “stato” del semaforo la lunghezza della sua coda di veicoli, possiamo dire che tale processo fa in modo che il semaforo transisca, con uno step unitario, da uno stato all’altro con una certa probabilità.

Nel dettaglio, l’evoluzione temporale del semaforo può essere scritta con un’equazione che metta in relazione la lunghezza della coda con i flussi in ingresso e in uscita. L’equazione dinamica per la lunghezza  $n$  della coda su di un semaforo è dunque scrivibile come

$$n(t+1) = n(t) - \theta(n)F(t) + \theta(M-n)I(t) \quad (4.8)$$

in cui  $F$  è la funzione di fase del semaforo con frazione verde  $f$  (cfr. fig. A.2),  $M$  è la coda massima,  $\theta$  è la funzione di Heaviside (con  $\theta(0) = 0$ ) e  $I$  è una funzione stocastica con una data distribuzione di probabilità. Nel caso unidimensionale, la distribuzione sarà data da due discreti valori per le due probabilità:

- $I_0$ , probabilità che  $I = 0$ ;
- $I_1$ , probabilità che  $I = 1$ .

Evidentemente, nel caso 1d,  $I_1 + I_0 = 1$ .

Possiamo studiare la forma di questa equazione e analizzarne il suo significato. Sono in essa chiaramente rappresentati i flussi in ingresso ed i flussi in uscita, ma sono, in qualche modo nascoste le dipendenze reciproche e le loro relazioni. Bisogna infatti osservare che il termine che rappresenta i flussi in uscita dal semaforo  $-\theta(n)F(t)$  contiene in sé, intrinsecamente, la dipendenza dal parametro di scala temporale del semaforo  $c$ , e che (a sua volta) i flussi in ingresso rappresentati dalla funzione  $i$  sono limitati dal fatto di non poter esser superiori al flusso massimo  $f$ , come già discusso nel capitolo iniziale.

Il modello funziona ed ha senso se consideriamo che il sistema raggiunga l'equilibrio: ciò vuol dire che i flussi in ingresso corrispondono ai flussi in uscita.

Se chiamiamo con  $s_0$  la probabilità che il nostro semaforo si trovi con una coda nulla (questa notazione si chiarirà in seguito), possiamo andare a considerare i flussi medi, ciò significa che

$$\langle \theta(n)f(t) \rangle = I_1 \quad (4.9)$$

Se supponiamo che  $\theta(n)$  e  $f(t)$  non siano correlati, e consideriamo che  $\theta(n) = 1$  tranne quando  $n = 0$ , allora abbiamo

$$(1 - s_0)f = I_1 \quad (4.10)$$

per cui

$$s_0 = 1 - \frac{I_1}{f} \quad (4.11)$$

ottenendo così un'espressione immediata per ciò che vuol dire avere il bilanciamento. E' evidente che se l'eq. 4.11 non risulta valida, le ipotesi di mancanza di correlazione e di equilibrio vengono meno.

Nel caso in cui infatti sia forte la correlazione, la media 4.9 non è più separabile: tali casi sono manifestamente quelli in cui il parametro  $c$ , caratteristico di tutti i semafori, diviene importante, portando a correlazioni di tipo periodico (come nel caso unidimensionale).

### 3.2 Matrice di transizione

Se riprendiamo l'equazione dinamica 4.8 e consideriamo un sistema senza correlazioni, possiamo elaborare una catena di stati accessibili dal sistema

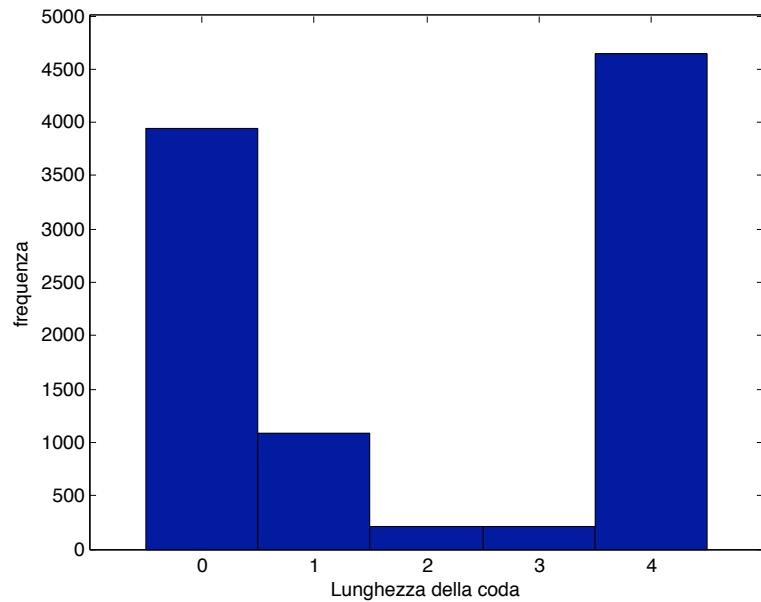


Figura 4.2: La distribuzione delle code su 10 prove del processo dinamico con  $F$  descritta da un processo periodico con frazione di verde  $f=0.5$ ,  $c=10$  e  $N=4$ .

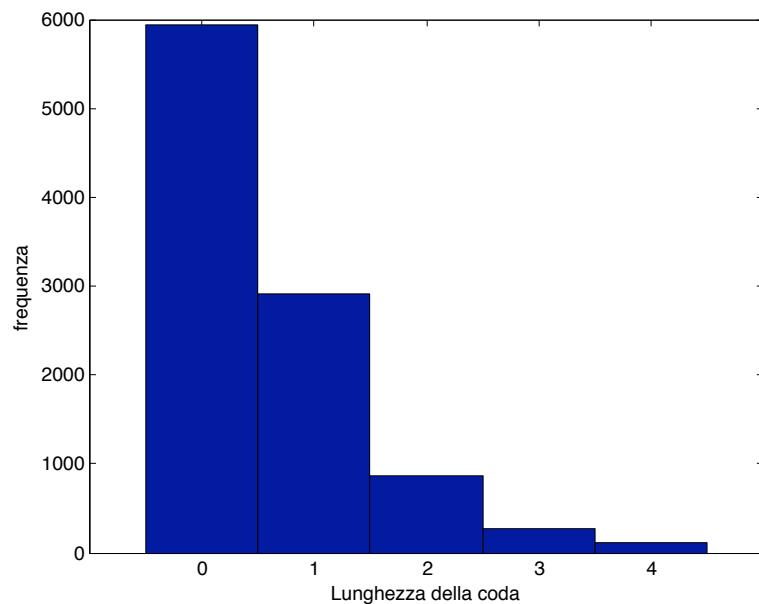


Figura 4.3: La distribuzione delle code su 10 prove del processo dinamico con  $F$  descritta da un processo casuale con media  $f=0.5$  e  $N=4$ .

costituito dal solo semaforo tramite un processo ad un solo step e la matrice di transizione  $T$  associata. In sostanza modellizziamo il problema come un solo semaforo che si relaziona con un “serbatoio” di veicoli che mantiene un flusso regolato da una certa distribuzione.

Prendiamo alcuni casi possibili dell’evoluzione del sistema:

$T_{00}$  : la probabilità è data da  $I_0$ , perché è impossibile perdere veicoli (quindi il termine che dipende da  $F(t)$  è nullo), e la probabilità di non riceverne alcuno è proprio  $1 - I_1 = I_0$ ;

$T_{01}$  : la probabilità è data da  $I_1$ , di conseguenza;

$T_{10}$  : la probabilità è data da  $I_0f$ , perché è la combinazione di due eventi indipendenti quali il fatto che il semaforo sia verde e che non ci sia nessun veicolo in ingresso;

$T_{11}$  : la probabilità è data da  $I_0(1 - f) + I_1f$ , per ragionamenti analoghi.

$T_{12}$  : la probabilità è data da  $I_1(1 - f)$ .

Si può procedere secondo questo schema per tutti gli stati accessibili sino ad arrivare a

$T_{MM-1}$  : la probabilità è data dalla combinazione della probabilità di non aver alcun veicolo in ingresso e di avere il semaforo verde,  $I_0f$

$T_{MM}$  : la probabilità è data da il complemento a 1 di  $T_{MM-1} = 1 - I_0f$ , leggibile come il fatto che ogni qualvolta si abbia un ingresso  $I_1$  la coda non aumenta (ma non può neanche diminuire), e che se non c’è ingresso e il semaforo è rosso ( $(I_0(1 - f))$ ) il numero di veicoli resta massimo.

Possiamo dunque scrivere la matrice di transizione  $T$ :

$$T = \begin{pmatrix} I_0 & I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_0f & I_0(1 - f) + I_1f & I_1(1 - f) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_0f & I_0(1 - f) + I_1f & I_1(1 - f) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_0f & I_1 + I_0(1 - f) \end{pmatrix}$$

Tale matrice (di dimensione  $N \times N$  con  $N = M + 1$ ) è regolare (esiste una potenza di  $T$  che contiene elementi strettamente positivi) e quindi ergodica. Esiste allora uno stato stazionario  $s$ , raggiungibile dalla catena, definito da

$$sT = s \quad (4.12)$$

in cui  $s$  è un vettore riga contenente la probabilità di trovarsi con 0, 1, 2 ...  $N-1$  veicoli in coda.

Per trovare lo stato stazionario, si può procedere o applicando più volte la matrice  $T$  su di un qualsiasi stato iniziale  $u(0)$ :

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} u(k) = u(0)TT\dots T \quad (4.13)$$

oppure cercando l'autovettore associato all'autovalore  $\lambda = 1$ . Si può vedere che la matrice così costruita e il suo vettore stazionario rispettano le condizioni di reversibilità della relazione 4.7.

In entrambi i modi, si ottiene un vettore  $s$  la cui componente  $s_0$  deve essere in accordo con l'espressione 4.11 finché le ipotesi di equilibrio e di non correlazione risultano valide. Possiamo computare quindi l'andamento di  $s_0(I_1)$  e confrontarlo con l'espressione 4.11, ottenendo il risultato in figura 4.4.

Quello che emerge da tale analisi è che esiste un valore del flusso in ingresso per il quale le ipotesi di equilibrio fatte in precedenza non reggono più: esiste un primo regime, con bassi flussi in ingresso, per il quale le nostre ipotesi sono valide, nel quale, in altre parole, il meccanismo di "svuotamento" della coda rimane efficiente; all'aumentare dei flussi in ingresso però l'output non aumenta proporzionalmente, ed emerge il fenomeno di cui si è discusso per buona parte della tesi, ovvero la congestione del semaforo.

In sostanza, anche in questo modello essenziale, depurato della forte correlazione presente nel caso toro unidimensionale, ritroviamo un fenomeno analogo di rallentamento dei flussi.

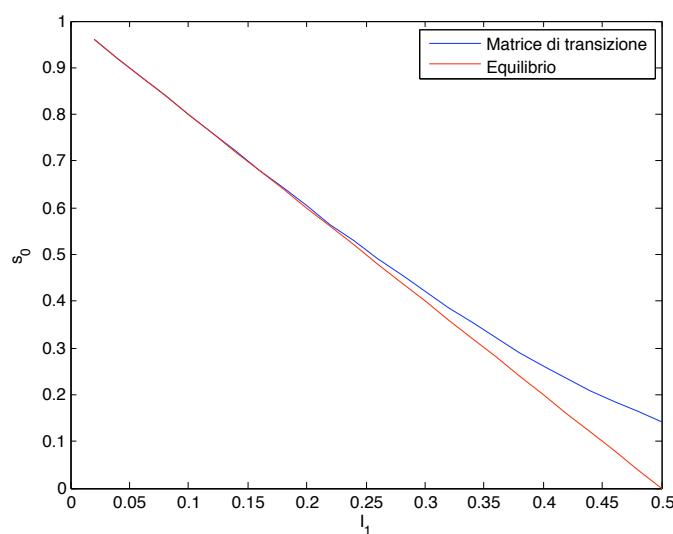


Figura 4.4: Confronto con l'andamento di  $s_0$  previsto dall'eq. 4.11 (curva rossa) con quanto computato con la matrice di Markov costruita in questo paragrafo (curva blu).

# Conclusioni

Abbiamo affrontato il problema della dinamica di flussi su network facendo l'*analisi*, ossia il frazionamento in sue parti più semplici. A questo scopo abbiamo sviluppato una serie di modelli e simulazioni al calcolatore col quale abbiamo raccolto vari dati sulle proprietà statistiche riconducibili agli osservabili macroscopici di velocità media e densità.

Il lavoro effettuato è stato largamente incentrato sul modello unidimensionale. Di questo modello si è riusciti a trovare il diagramma fondamentale e le curve di velocità in funzione della densità e anche di alcuni parametri di controllo caratteristici del nostro sistema. Abbiamo anche individuato la causa dinamica, nel nostro modello, della transizione dal regime libero a quello congestionato e sviluppato una serie di metodi volti a metterne in luce le caratteristiche significative dal punto di vista statistico: il processo di riempimento del toro unidimensionale, e il conseguente ridursi del numero medio di siti con numero di veicoli in coda nullo conduce alla transizione; ogni analisi deve essere sviluppata su un grande numero di prove perché i vincoli dimensionali producono una dinamica che in singola realizzazione è periodica e non ergodica; sappiamo che tale processo di accumulazione è governato dalle scale caratteristiche di funzionamento degli switch semaforici, sebbene un'espressione analitica che spieghi tale regolazione non sia stata trovata.

In seguito abbiamo esteso il modello al caso bidimensionale, col quale abbiamo ricostruito un diagramma fondamentale analogo (almeno come andamento) a quanto ottenuto in letteratura (cfr. [1], [3], [6], [2]) e contestualmente prodotto il confronto con l'unidimensionale: il risultato è quello di un riprodursi (nel caso 2d) dei comportamenti 1d in maniera “addolcita” e statisticamente mediata dalle molteplici possibilità di scelta che le aumentate

dimensioni consentono. Infatti, la dinamica bidimensionale perde di periodicità ed anche una sola realizzazione diviene statisticamente significativa. Abbiamo, in questo caso bidimensionale, effettuato anche qualche simulazione per osservare lo sviluppo temporale della congestione in 2d, rimarcando l'effetto di cooperazione fra i nodi del network. Infine, si è approntato un modello minimale di natura markoviana per esprimere in termini diversi e più sostanziali la transizione dal regime libero a quello congestionato, tramite una semplice equazione dinamica e la rottura di ipotesi di equilibrio: sotto tale analisi, la catena di Markov a matrice di transizione stazionaria che rappresenta il flusso per un processo di natura stocastica mostra la rottura dell'equilibrio producendo flusso in uscita insufficienti rispetto ai flussi in ingresso.

Il lavoro si presta ad ulteriori ampliamenti che vadano nelle seguenti direzioni: ottenere un'espressione analitica che esprima il numero medio di siti liberi da veicoli in funzione dei parametri macroscopici caratteristici del sistema; dettagliare in maniera specifica il modello a catena di Markov, per delineare esattamente i limiti di validità e di applicabilità di un tale metodo per l'espressione delle dinamiche su network; eventualmente arricchire questa descrizione esprimendo esplicitamente il set di matrici di transizione che guidano la dinamica dei veicoli.

# Appendice A

## Modello unidimensionale: dettagli algoritmici

Consideriamo il seguente problema: abbiamo una popolazione di oggetti che si muovono su di un cammino unidimensionale composto da una serie di passi discreti, e a ciascun passo possono rimanere fermi per un certo periodo di tempo. Chiamiamo, ai fini di rendere palese il legame con la mobilità urbana, *veicoli* gli oggetti che si muovono sulla rete e *semafori* gli elementi regolatori che la compongono. Evidentemente, il modello non è ancora pienamente caratterizzato. Bisogna ancora dire, infatti, come i veicoli transitino da un semaforo al successivo e in che modo i semafori costringono all'attesa. Nel momento in cui si fa un modello discreto al calcolatore, si ha un certa libertà di scelta sui dettagli della rappresentazione di un problema: si sceglie, spesso, di cercare d'applicare il criterio del rasoio di Occam<sup>1</sup>, e così si è cercato di operare anche noi. Abbiamo dunque fatto le seguenti assunzioni:

- un veicolo si muove da un semaforo al successivo in uno step temporale (il che equivale a dire che se la distanza fra due semafori è  $1u$ , con  $u$  arbitraria unità spaziale, i veicoli si muovono fra un semaforo e l'altro ad una velocità fissa  $1u/\Delta t$ , in cui  $\Delta t$  lo step temporale);
- tutti i semafori sono governati allo stesso modo: possiedono tutti un ciclo operativo  $c$  di valore fissato, del quale solo una frazione  $f$  (uguale per

---

<sup>1</sup> *Frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora.* ossia *inutile fare con più ciò che si può fare con meno.*

tutti i semafori) è dedicata ad una fase di passaggio (che chiameremo ovviamente fase verde);

- i veicoli attraversano i semafori uno per volta;
- la catena di semafori che si crea è chiusa, quindi il numero di veicoli sul toro che viene a crearsi si conserva.

Abbiamo dunque fatto le seguenti assunzioni:

- un veicolo si muove da un semaforo al successivo in uno step temporale (il che equivale a dire che se la distanza fra due semafori è  $1u$ , con  $u$  arbitraria unità spaziale, i veicoli si muovono fra un semaforo e l'altro ad una velocità fissa  $1u/\Delta t$ , in cui  $\Delta t$  lo step temporale);
- tutti i semafori sono governati allo stesso modo: possiedono tutti un ciclo operativo  $c$  di valore fissato, del quale solo una frazione  $f$  (uguale per tutti i semafori) è dedicata ad una fase di passaggio (che chiameremo ovviamente fase verde);
- i veicoli attraversano i semafori uno per volta;
- la catena di semafori che si crea è chiusa, quindi il numero di veicoli sul toro che viene a crearsi si conserva.

Con questo modello è stato implementato un programma in C++ strutturato tramite la programmazione ad oggetti capace di riprodurre la dinamica. Di seguito, in fig. A.1 è rappresentato schematicamente l'algoritmo implementato e in fig. A.2 il grafico della funzione periodica rappresentante il ciclo dei semafori.

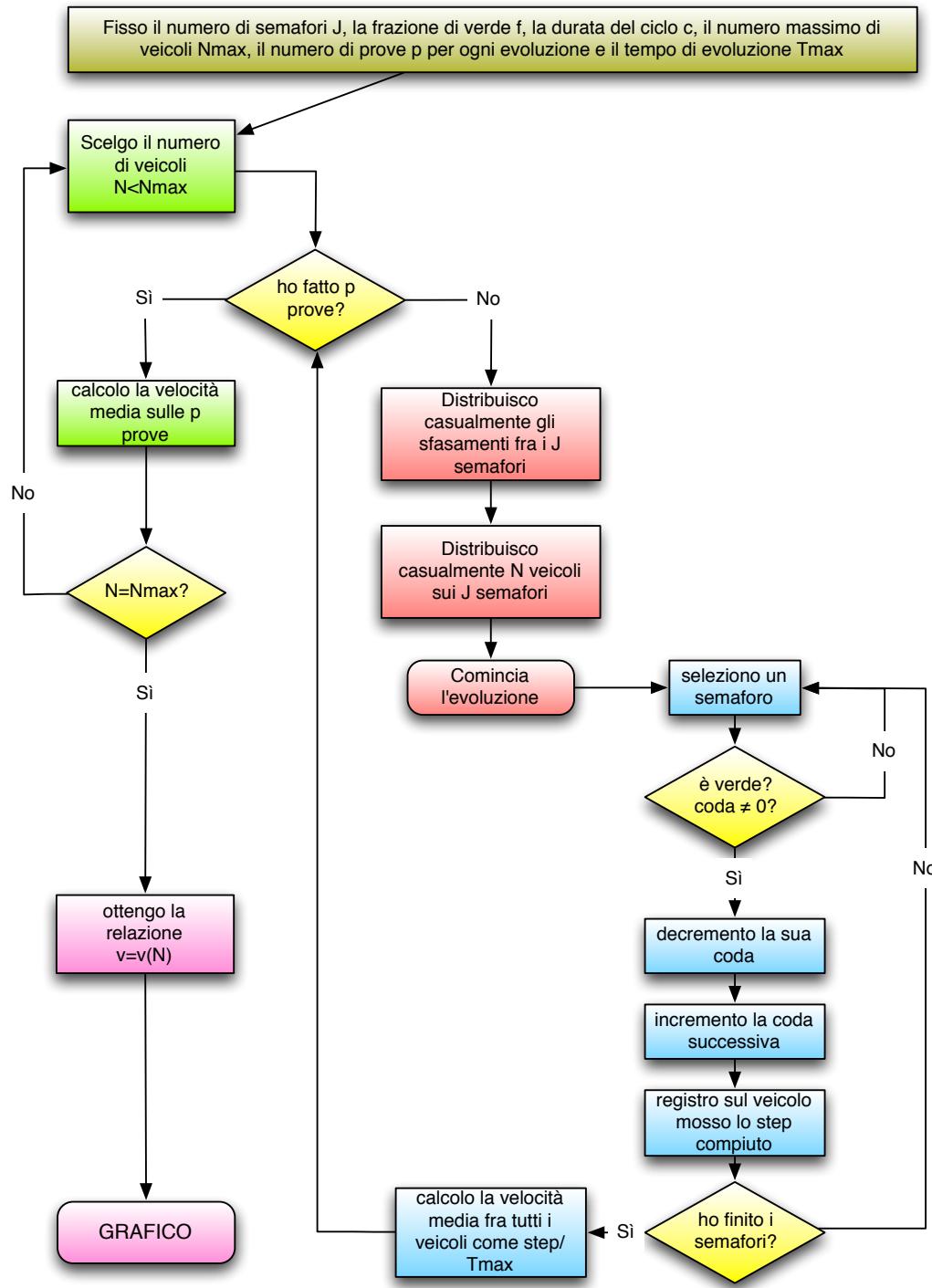


Figura A.1: Lo schema dell'algoritmo della simulazione.

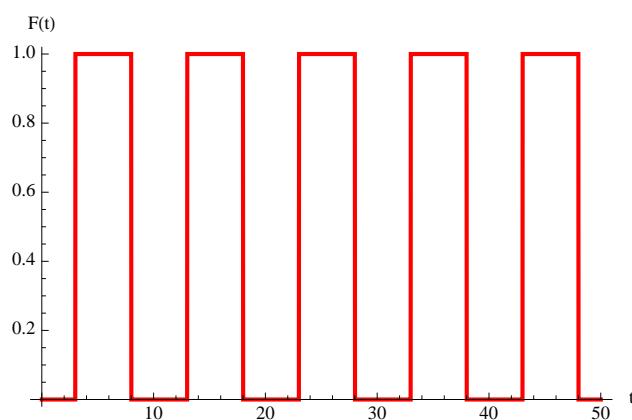


Figura A.2: Una rappresentazione della funzione di switch  $F_j$  dei semafori, con  $c=10$ ,  $f=0.5$ ,  $\phi = 3$ .

# Bibliografia

- [1] N. Geroliminis, *A Macroscopic Fundamental Diagram of Urban Traffic: Recent Findings*, dal materiale per il Symposium on the Fundamental Diagram, Woods Hole, Massachusetts, 8-10 Luglio 2008.
- [2] C. Davis, *Physicists and Traffic Flow*, APS News, April 2004 (Volume 13, Number 4).
- [3] N. Geroliminis, F. Daganzo, *Existence of urban-scale macroscopic fundamental diagrams: Some experimental findings* (October 1, 2007). UC Berkeley Center for Future Urban Transport: A Volvo Center of Excellence. Paper vwp-2007-5.
- [4] N. Geroliminis, F. Daganzo, *An analytical approximation for the macroscopic fundamental diagram of urban traffic*. UC Berkeley Center for Future Urban Transport: A Volvo Center of Excellence. Paper vwp-2008-3.
- [5] Herman, R., Prigogine, I., 1979. *A two-fluid approach to town traffic*, Science 204, 148–151.
- [6] D. Helbing, *Derivation of a fundamental diagram for urban traffic flow*, Eur. Phys. J. B PREPRINT (2009).
- [7] S. B. Cools *A realistic simulation for self-organizing traffic lights.*, Vrije Universiteit Brussel Faculteit Wetenschappen, Settembre 2006.
- [8] S. M. Ross, *Stochastic processes* - New York , Wiley, ©1996.

- [9] S. Valverde, R. V. Solé *Self-organized Critical Traffic in Parallel Computer Networks*, Physica A, Volume 312, Number 3, 15 September 2002 , pp. 636-648(13).
- [10] K. B. Davidson, *A flow travel-time relationship for use in transportation planning*. Proceedings of the 3rd ARRB Conference, Part 1 (Australian Road Research Board, Melbourne, 1966), pp. 183–194B. K. Chakrabarti, A. Chakraborti, A. Chatterjee (Wiley, Weinheim, 2006), p. 552.
- [11] R. J. Smeed, *Road capacity of city centers*. Tra?c Engineering and Control 8, 455–458 (1966).
- [12] Y. Zahavi, *Tra?c performance evaluation of road networks by the  $\alpha$ -relationship*, Parts I and II. Tra?c Engineering and Control 14, 228–231 and 292–293 (1972).
- [13] J. G. Wardrop, *Journey speed and flow in central urban areas*. Tra?c Engineering and Control 9, 528–532 (1968).
- [14] R. Herman and S. Ardekani, Charakterizing tra?c conditions in urban areas. Transportation Science 18(2), 101- 139 (1984).
- [15] B. S. Kerner and H. Rehborn, *Experimental properties of phase transitions in traffic flow*, Phys. Rev. Lett. 79, p.4030-33, 1997.
- [16] S. Boccaletti , V. Latora, e al., *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics Reports 424 (2006).